Examen Terminal

Mercredi 27 juin 2018

Durée : 3 heures.

Tous les documents sont interdits, ainsi que les calculatrices et les téléphones portables. Les exercices sont indépendants entre eux. Une attention particulière sera portée à la rédaction.

1. Application du cours.

- Un système de quatre vecteurs de $\mathbb{R}^3$ peut-il être libre? Justifier votre réponse et l'appliquer aux vecteurs $e_1, e_2, e_1 + e_3$ et $e_1 + e_2$ (où e_1, e_2 et e_3 sont les vecteurs de la base canonique de $\mathbb{R}^3$). On déterminera toutes les combinaisons linéaires non triviales éventuelles entre ces quatre vecteurs.
- Un système de trois vecteurs dans $\mathbb{R}^4$ peut-il être générateur? Justifier votre réponse.
- Le système $\{e_1, e_1 + e_2, e_1 + e_2 + e_3\}$ est-il libre dans $\mathbb{R}^4$? Trouver une base de $\mathbb{R}^4$ comprenant ces trois vecteurs.

2. Exercice 1. Soit la fonction $\sqrt{1+x}$. Déterminer son domaine de définition, de continuité et de dérivabilité.

- Déterminer la dérivée de cette fonction en $x = 0$ et donner l'équation de la tangente à la courbe $y = \sqrt{1+x}$ au point $(0, 1)$.
- En étudiant les variations de $f(x) = \sqrt{1+x} - 1 - \frac{x}{2}$ sur son intervalle de définition, montrer que

$$\forall x > 0, 1 < \sqrt{1+x} < 1 + \frac{x}{2}.$$

3. Exercice 2. On considère les polynômes $P = X^4 + X^3 - X^2 + X - 2$ et $Q = X^3 + X^2 - 2X$.

- Donner le reste de la division euclidienne de P par Q .
- Appliquer l'algorithme d'Euclide aux polynômes P et Q . En déduire un polynôme divisant P et Q .
- Factoriser (dans $\mathbb{C}$) les polynômes P et Q . En déduire les racines réelles et complexes des polynômes P et Q .

4. Exercice 3.

— Résoudre le système

$$\begin{cases} -x + 2z & = 0 \\ 3x + 2y - 2z & = 0 ; \\ z & = 0 \end{cases}$$

— Résoudre le système

$$\begin{cases} -x + 2z & = 1 \\ 3x + 2y - 2z & = 1 ; \\ z & = 1 \end{cases}$$

— Résoudre le système

$$\begin{cases} -3x + 2z & = 0 \\ 3x - 2z & = 0 ; \\ -z & = 0 \end{cases}$$

— Résoudre le système

$$\begin{cases} -3x + 2z & = \alpha \\ 3x - 2z & = -1 \\ -z & = 1 \end{cases}$$

(on discutera selon la valeur de α).

5. Exercice 4. On note $\{e_1, e_2, e_3\}$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$. On considère l'application linéaire l de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$ donnée par $l(e_1) = -e_1 + e_3$, $l(e_2) = -3e_1 + 2e_2 + e_3$ et $l(e_3) = e_1 - e_3$.

— Donner la matrice A de l dans la base canonique.

— Déterminer le rang de l .

— Déterminer l'image de l . On en donnera une base et un système d'équation(s).

— Déterminer le noyau de l . On en donnera une base et un système d'équation(s).

On se donne le système de vecteur $f_1 = e_1 + e_3$, $f_2 = -e_1 + e_3$ et $f_3 = -e_1 + e_2$. Vérifier que ce nouveau système forme une base de $\mathbb{R}^3$. En donner la matrice de passage. Déterminer la matrice B de l dans la base $\{f_1, f_2, f_3\}$.

Barème indicatif : Application du cours (3=1+1+1 points). Exercice 1 (3=1+1+1 points). Exercice 2 (4=1+1+2 points). Exercice 3 (4=1+1++1). Exercice 4 (7=(1+1+1+1)+(1+2 points).