Université Paris Diderot Paris 7
Licence L1 (S2)
2017-2018

Département de Sciences Exactes
Algèbre et analyse élémentaires II
MI2

(Un) Corrigé de l'examen Partiel

Durée : 3 heures.

Question de cours.

Soit f une application linéaire d'un espace vectoriel réel $E = \mathbb{R}^m$ dans un autre espace vectoriel réel $F = \mathbb{R}^n$. Définir le noyau de l'application linéaire f . Donner un exemple d'application linéaire non nulle dont le noyau n'est pas réduit à $\{0\}$.

Indications. Le noyau de f est l'ensemble des vecteurs de E qui s'envoient par f sur le vecteur 0 :

$$\mathrm{Ker}(f) = \{u \in E \; ; \; f(u) = 0\} \; .$$

Considérons la forme linéaire sur $\mathbb{R}^2$ donnée par $l(x, y) = x - y$. Elle n'est pas nulle puisque $l(e_1) = 1$. Et tous les vecteurs de la droite engendrée par le vecteur $(1, 1)$ (ils s'écrivent donc (λ, λ)) ont pour image $\lambda - \lambda = 0$. Ce sont exactement les vecteurs du noyau de l .

On a vu en cours que, plus généralement, toute forme linéaire non nulle sur $\mathbb{R}^n$ avait pour noyau un hyperplan H ($\mathrm{codim}(H) = 1$, $\mathrm{Dim}(H) = n - 1$).

Exercice 1. On considère l'espace vectoriel $\mathbb{R}^4$.

- Soit H l'ensemble des vecteurs $u = (x, y, z, t)$ de $\mathbb{R}^4$ qui vérifient $x - y + z - t = 0$. Quelle est la dimension de H ? En donner une base.
- Soient $u_1 = (1, 0, 1, 0)$ et $u_2 = (0, 1, 0, 1)$ deux vecteurs de R^4 . On note $P =< u_1, u_2 >$ le sous-espace vectoriel engendré par u_1 et u_2 . Quelle est la dimension de P ? En donner une base. Déterminer un système d'équations définissant P .
- Déterminer $H \cap P$ et $H + P$. Le sous-espace H et le sous-espace P sont-ils supplémentaires dans $\mathbb{R}^4$?
- Trouver un supplémentaire de P dans $\mathbb{R}^4$ et un supplémentaire de H dans $\mathbb{R}^4$.

Indications.

- L'ensemble des vecteurs de $\mathbb{R}^4$ qui vérifient $x - y + z - t = 0$ est un hyperplan de $\mathbb{R}^4$ dont la co-dimension est 1 (une équation) et la dimension $4 - 1 = 3$. Une base sera donc donnée par un système (libre) de 3 vecteurs. Pour trouver un tel système, on peut remarquer que

$$x - y + z - t = 0 \Leftrightarrow t = x - y + z$$

soit

$$(x, y, z, t) \in H \Leftrightarrow (x, y, z, t) = (x, y, z, x - y + z)$$

soit
$$(x, y, z, t) = x(1, 0, 0, 1) + y(0, 1, 0, -1) + z(0, 0, 1, 1) .$$
Bref le système des trois vecteurs $\{(1, 0, 0, 1), (0, 1, 0, -1), (0, 0, 1, 1)\}$ est générateur de H ; il en forme donc une base d'après le cours.

— Les vecteurs u_1 et u_2 ne sont pas proportionnels entre eux. Ils forment donc un système libre de 2 vecteurs qui engendre par définition P . Ainsi P est de dimension 2 . L'ensemble des combinaisons linéaires des vecteurs u_1 et u_2 est l'ensemble des vecteurs qui s'écrivent $(\lambda, \mu, \lambda, \mu) = \lambda u_1 + \mu u_2$. Ces vecteurs vérifient les deux équations (indépendantes) $x - z = 0$ et $y - t = 0$. Nous avons donc trouvé un système de deux équations définissant P . On aurait pu aussi constater qu'un vecteur quelconque (x, y, z, t) de $\mathbb{R}^4$ ne pouvait s'écrire $\lambda u_1 + \mu u_2$ que si $x - z = 0$ et $y - t = 0$.

— Comme nous savons que H et P sont définis par des équations, pour trouver tous les vecteurs de $H \cap P$, il nous suffit de trouver les vecteurs qui vérifient simultanément ces trois équations :
$$u \in H \cap P \Leftrightarrow \begin{cases} x - y + z - t & = & 0 \\ x - y & = & 0 \\ y - t & = & 0 \end{cases}$$
soit
$$u \in H \cap P \Leftrightarrow \begin{cases} z & = & x \\ y & = & x \\ t & = & y \end{cases}$$
Les vecteurs de $H \cap P$ sont donc les vecteurs de la forme $x(1, 1, 1, 1)$ soit les vecteurs de la droite $D = \mathbb{R}(1, 1, 1, 1)$. Les sous-espaces vectoriels H et P ne sont donc pas en somme directe ni, a fortiori, supplémentaires. On a, d'après le cours,
$$\mathrm{Dim}(H) + \mathrm{Dim}(P) = 3 + 2 = 5$$
mais aussi
$$\mathrm{Dim}(H) + \mathrm{Dim}(P) = \mathrm{Dim}(H \cap P) + \mathrm{Dim}(H + P) = 1 + \mathrm{Dim}(H + P) .$$
Aussi $\mathrm{Dim}(H + P) = 5 - 1 = 4$ soit $H + P = \mathbb{R}^4$. Ainsi tout vecteur de $\mathbb{R}^4$ est somme (non unique) d'un vecteur de H et d'un vecteur de P .

— Pour trouver un supplémentaire de H dans $\mathbb{R}^4$ il suffit de trouver un vecteur de $\mathbb{R}^4$ qui n'appartient pas à H . Le vecteur u_1 de P (ou bien u_2) n'appartient pas à H donc il forme un supplémentaire de H dans $\mathbb{R}^4$.
$$H \oplus \mathbb{R}u_1 = \mathbb{R}^4 .$$
Les vecteurs $(1, 1, 0, 0)$ et $(0, 1, 1, 0)$ sont des vecteurs de H non proportionnels donc ils forment un système libre (dans H ou $\mathbb{R}^4$). Ils engendrent un

sous-espace Π de H de dimension 2 et ce sous-espace ne contient pas $H \cap P$. Alors

$$P \cap \Pi \subset P \cap H = D$$

donc

$$P \cap \Pi \subset \Pi \cap D = \{0\} .$$

Donc P et Π sont en somme directe. Ce sont deux plans donc $P + \Pi$ est de dimension $2 + 2 = 4$ donc

$$P \oplus \Pi = \mathbb{R}^4 .$$

Exercice 2 . On note $e_1 = (1, 0, 0)$, $e_2 = (0, 1, 0)$ et $e_3 = (0, 0, 1)$ les vecteurs de la base canonique de $\mathbb{R}^3$. On considère le système formé par les trois vecteurs $f_1 = e_1 - e_2$, $f_2 = e_1 - e_2 + e_3$ et $f_3 = e_1 + e_2$.

1. Le système $\{f_1, f_2, f_3\}$ forme-t-il une nouvelle base de $\mathbb{R}^3$?
2. La matrice P
$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$
est-elle inversible ?
3. Déterminer P^{-1} (on pourra exprimer les vecteurs e_i ($i = 1, 2, 3$) en fonction du système de vecteurs $\{f_1, f_2, f_3\}$).
4. Déterminer les coordonnées du vecteur $e_1 + e_2 + e_3$ dans la base$\{f_1, f_2, f_3\}$.
5. Déterminer les coordonnées du vecteur $f_1 - f_2 + f_3$ dans la base$\{e_1, e_2, e_3\}$.

Indications.

1. Nous avons plusieurs méthodes à notre disposition : déterminer si ce système de trois vecteurs est libre (alors il formera un système libre de 3 vecteurs dans un espace de dimension 3 donc une base de $\mathbb{R}^3$) ; déterminer si ce système est générateur dans $\mathbb{R}^3$ (alors il formera un système générateur de 3 vecteurs dans un espace de dimension 3 donc une base de $\mathbb{R}^3$) ; déterminer enfin le rang de la matrice (de passage) formée en colonnes par les coordonnées de ces vecteurs f_i dans la base canonique.
   (a) Les vecteurs $f_1 = e_1 - e_2$ et $f_3 = e_1 + e_2$ ne sont pas proportionnels donc ils forment un système libre de 2 vecteurs. Il est immédiat de constater qu'ils engendrent le plan $\mathbb{R}e_1 \oplus \mathbb{R}e_2$. Or le vecteur f_2 n'appartient pas à ce plan donc le système $\{f_1, f_2, f_3\}$ est libre et forme une base.
   (b) Les vecteurs de la base canonique s'écrivent-ils en fonction des vecteurs f_i ? Il suffit pour cela de résoudre le système
$$\begin{cases} f_1 &= e_1 - e_2 \\ f_2 &= e_1 - e_2 + e_3 \\ f_3 &= e_1 + e_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f_1 + f_3 &= 2e_1 \\ f_2 &= e_1 - e_2 + e_3 \\ f_3 - f_1 &= 2e_2 \end{cases}$$

soit

$$\begin{cases} f_1 + f_3 &= 2e_1 \\ f_3 - f_1 &= 2e_2 \\ f_2 - f_1 &= e_3 \end{cases} .$$

Donc le système $\{f_1, f_2, f_3\}$ est générateur de $\mathbb{R}^3$. C'est une base de $\mathbb{R}^3$.

(c)

$$(f_1\ f_2\ f_3) = (e_1\ e_2\ e_3)P = (e_1\ e_2\ e_3)\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} .$$

Or

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} .$$

Cette matrice est échelonnée donc de rang 3 donc inversible. Notre système est donc une base.

2. La matrice P est la matrice de passage de la base canonique à la base $\{f_1, f_2, f_3\}$. La matrice P^{-1} est la matrice de passage de la base $\{f_1, f_2, f_3\}$ à la base canonique. Or on a vu précédemment que

$$(e_1\ e_2\ e_3) = (f_1\ f_2\ f_3)\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix} .$$

Donc

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix} .$$

3. Soient α, β, γ les coordonnées cherchées. Soit on utilise que

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = P\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} \text{ soit } \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} = P^{-1}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

(les anciennes coordonnées s'expriment en fonction des nouvelles via la matrice de passage). D'où

$$\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} .$$

Soit on utilise que

$$e_1 + e_2 + e_3 = \frac{1}{2}(f_1 + f_3) + \frac{1}{2}(-f_1 + f_3) + f_2 - f_1 = -f_1 + f_2 + f_3 .$$

4. Soient α', β', γ' les coordonnées cherchées. De même on a

$$\begin{pmatrix} \alpha' \\ \beta' \\ \gamma' \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

ou

$$f_1 - f_2 + f_3 = e_1 - e_2 - (e_1 - e_2 + e_3) + e_1 + e_2 = e_1 + e_2 - e_3 \,.$$

Exercice 3. Considérons l'application linéaire $\Phi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ ayant la matrice suivante relativement aux bases canoniques de ces deux espaces :

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

1. Donner des bases du noyau et de l'image de Φ .
2. Φ est-elle injective ? surjective ?

On considère désormais l'endomorphisme Λ de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^4$ donné par la matrice

$$B = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 2 \\ 2 & 0 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} \,.$$

1. Déterminer l'image et le noyau de Λ.
2. Λ est-elle injective ? surjective ?

Indications.

1. Déterminons le rang de la matrice A .

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & -3 & -2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \,.$$

   Bref A est de rang 2 . L'application linéaire Φ est donc de rang 2 . La dimension de l'image est donc 2 . D'après le théorème du rang, la dimension du noyau vérifie

$$\mathrm{Dim}(\mathrm{Ker}(\Phi)) + \mathrm{Dim}(\mathrm{Im}(\Phi)) = \mathrm{Dim}(\mathbb{R}^3) = 3$$

soit $\mathrm{Dim}(\mathrm{Ker}(\Phi)) = 3 - 2 = 1$. Les vecteurs du noyau sont les vecteurs dont les coordonnées sont les solutions du système homogène $AX = 0$. Et celui-ci est équivalent à

$$\begin{cases} -x + y + z &= 0 \\ 3y + 2z &= 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x &= -\lambda \\ y &= 2\lambda \\ z &= -3\lambda \end{cases}$$

soit

$$\mathrm{Ker}(\Phi) = \mathbb{R} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} .$$

L'image est engendrée par deux quelconques des vecteurs colonnes (qui sont les vecteurs image de la base canonique). Par exemple

$$\mathrm{Im}(\Phi) = \mathbb{R} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \oplus \mathbb{R} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} .$$

2. Puisque Φ a un noyau qui n'est pas réduit à $\{0\}$, elle ne peut être injective. Puisque l'image de Φ est de dimension 2 (dans $\mathbb{R}^4$) , elle ne peut être surjective.

1. La matrice B est une matrice extraite de A et l'on voit immédiatement qu'elle est de rang 2 (par exemple en remarquant que les deux vecteurs colonnes de la matrice ne sont pas proportionnels). Son noyau est donc de dimension $2 - 2 = 0$. Il est donc réduit à $\{0\}$. Et son image est engendrée par les deux vecteurs colonnes de la matrice :

$$\mathrm{Im}(\Lambda) = \mathbb{R} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} \oplus \mathbb{R} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} .$$

2. Puisque l'image de Λ est de dimension 2 (dans $\mathbb{R}^4$) , elle ne peut être surjective. Puisque Λ a un noyau qui est réduit à $\{0\}$, elle est injective.

Barème utilisé : Question de cours (3 points). Exercice 1 (6=1+2+(1+1)+1 points). Exercice 2 (6=2+1+2+0,5+0,5 points). Exercice 3 (6=2+1+2+1 points).