

ALGÈBRE LINÉAIRE.

Espaces vectoriels. Feuille n°2.

1. Bases et dimension.

Exercice 1:

Dans \mathbb{R}^3 , on considère le sous-ensemble

$$P = \{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x - 2y + 3z = 0 \}.$$

Mettre en évidence deux vecteurs v, w , non mutuellement proportionnels, appartenant à P et montrer que tout élément de P est une combinaison linéaire de v et w .

Exercice 2:

On considère l'espace vectoriel réel \mathbb{R}^3 . Déterminer la dimension de la partie F formée des vecteurs (x, y, z) qui vérifient l'identité $2x - y - 2z = 0$. En trouver une base.

Exercice 3:

Dans l'espace vectoriel \mathbb{R}^4 , trouver une base du sous-espace vectoriel formé des (x, y, z, t) qui vérifient $x - y = 0$ et $z - t = 0$.

Exercice 4:

On considère l'espace vectoriel réel \mathbb{R}^4 . Déterminer la dimension de la partie F suivante :

$$F = \left\{ (x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 ; \left(\begin{array}{cccc} 2x & + & y & + & 2z & + & 3t & = & 0 \\ x & + & y & + & 3z & & & = & 0 \end{array} \right) \right\}.$$

En trouver une base.

Exercice 5:

a) On considère le sous-espace F de \mathbb{R}^4 engendré par les vecteurs $(1, -1, 1, 0)$, $(1, 1, 0, 1)$ et $(2, 0, 1, 1)$. Trouver un système d'équations définissant ce sous-espace dans \mathbb{R}^4 .

b) Même question pour le sous-espace G de \mathbb{R}^4 engendré par les vecteurs $(1, -1, 1, 0)$, $(1, 1, 0, 1)$ et $(2, 0, 1, 0)$.

Exercice 6:

Dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}_3[X]$ des fonctions polynomiales en x de degré au plus 3, on considère la suite (p_1, p_2, p_3, p_4) , où

$$p_1(x) = (1-x)^3, p_2(x) = x(1-x)^2, p_3(x) = x^2(1-x), p_4(x) = x^3.$$

Calculer les coordonnées de p_j dans la base canonique de $\mathbb{R}_3[X]$; en déduire que la suite (p_1, p_2, p_3, p_4) est une base de $\mathbb{R}_3[X]$.

Exercice 7:

Montrer que l'ensemble des applications de $] -1, 1[$ dans \mathbf{R} définies par :

$$f(x) = a\sqrt{\frac{1-x}{1+x}} + b\sqrt{\frac{1+x}{1-x}} + c\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} + d\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$$

où $a, b, c, d \in \mathbf{R}$, est un \mathbf{R} -espace vectoriel. En déterminer la dimension et en donner une base.

Exercice 8:

On considère l'ensemble des suites numériques réelles qui vérifient

$$\forall n \geq 0 \quad u_{n+2} = u_{n+1} + u_n.$$

a) Chercher toutes les suites géométriques $u_n = q^n$ appartenant à ce sous-espace et mettre ainsi en évidence une base de ce sous-espace.

b) Donner une expression explicite de la suite de Fibonacci (suite qui vérifie $w_{n+2} = w_{n+1} + w_n$ et $w_0 = 1 = w_1$).

Exercice 9:

Soit E un espace vectoriel réel. Soient F_1 et F_2 deux sous-espaces vectoriels de E . Montrer que l'on a

$$\dim(F_1 + F_2) + \dim(F_1 \cap F_2) = \dim(F_1) + \dim(F_2).$$

Exercice 10:

Soit $E = \{a + b(1 + \sqrt{2})^2 + c(1 - \sqrt{2})^2 : a, b, c \in \mathbf{Q}\}$. Montrer que E un \mathbf{Q} -espace vectoriel, en donner une base et en déterminer la dimension.

Exercice 11:

Montrer que dans le \mathbf{Q} -espace vectoriel \mathbf{R} , la famille $(1, \sqrt{2})$ est libre, puis que la famille $(1, \sqrt{2}, \sqrt{6})$ est libre. Quelle est la dimension du sous- \mathbf{Q} -espace vectoriel engendré par cette dernière?

2. Espaces supplémentaires.**Exercice 1:**

Soit E_1 le sous-espace de \mathbb{R}^4 engendré par $\{(1, 3, 0, 4), (2, 0, 1, 2)\}$ et E_2 le sous-espace engendré par $\{(1, 1, 2, 3), (4, -1, 0, 2)\}$. E_1 et E_2 sont-ils supplémentaires dans \mathbb{R}^4 ?

Exercice 2:

Soit E_1 et E_2 les sous-espaces vectoriels de \mathbb{R}^4 engendrés respectivement par les vecteurs $\{(1, -1, 0, 1), (0, 2, 1, 0)\}$ et les vecteurs $\{(0, 6, -1, 4), (3, 3, 1, 5)\}$.

- Caractériser $E_1 \cap E_2$.
- Donner une base de $E_1 + E_2$.
- Déterminer un supplémentaire de $E_1 + E_2$ dans \mathbb{R}^4 .

Exercice 3:

Dans l'espace vectoriel \mathbb{R}^4 on considère l'ensemble E des (x, y, z, t) tels que $x + y + z + t = 0$ et l'ensemble F des (x, y, z, t) tels que $x = y = z = t$.

- Montrer que E et F sont des sous-espaces supplémentaires dans \mathbb{R}^4 .
- Déterminer des bases de E et de F .

Exercice 4:

Soit E le sous-espace vectoriel de \mathbb{R}^4 engendré par les vecteurs $(1, -1, 2, 3)$, $(1, 1, 2, 0)$ et $(3, -1, 6, -6)$, et F le sous-espace engendré par $(0, -2, 0, -3)$, $(1, 0, 1, 0)$.

- Trouver des bases de $E, F, E \cap F, E + F$.
- E et F sont-ils des sous-espaces supplémentaires dans \mathbb{R}^4 ?

Exercice 5:

Soit F le sous-espace vectoriel de \mathbb{R}^4 engendré par les vecteurs $(1, 1, 1, 1)$, $(1, -1, 1, -1)$ et $(1, 3, 1, 3)$ et G le sous-espace vectoriel de \mathbb{R}^4 engendré par les vecteurs $(1, 2, 0, 2)$, $(1, 2, 1, 2)$ et $(3, 1, 3, 1)$.

- Trouver la dimension de F et G . En donner des bases.
- Trouver la dimension des sous-espaces $F \cap G$ et $F + G$. En donner des bases.
- E et F sont-ils des sous-espaces supplémentaires dans \mathbb{R}^4 ?

Exercice 6:

a) Montrer que les vecteurs $u_1 = (1, 2, 0)$, $u_2 = (2, 1, 2)$ et $u_3 = (3, 1, 1)$ forment une base \mathcal{B} de \mathbb{R}^3 .

b) Trouver les coordonnées du vecteur $w = (1, 2, 3)$ dans cette base.

c) Montrer que les vecteurs $v_1 = (0, 1, 0)$, $v_2 = (1, 0, 1)$ et $v_3 = (2, 1, 0)$ forment une autre base \mathcal{B}' de \mathbb{R}^3 .

d) Trouver les coordonnées des vecteurs u_i ($i = 1, 2, 3$) dans la base \mathcal{B}' . En déduire les coordonnées de w dans la base \mathcal{B}' .

Exercice 7:

Soit m un paramètre réel. Dans l'espace vectoriel \mathbb{R}^2 , on considère les vecteurs $v = (1, 2)$ et $w = (-2, m)$. On note F_m l'espace vectoriel engendré par les deux vecteurs.

a) Quelle peut être la dimension d'un sous-espace vectoriel supplémentaire de F_m (on discutera suivant la valeur de m)?

b) Trouver un tel sous-espace supplémentaire dans tous les cas.

Exercice 8:

Soit m un paramètre réel. Dans l'espace vectoriel \mathbb{R}^3 , on considère les vecteurs $v = (1, -2, -5)$ et $w = (-2, 4, m)$. On note F_m l'espace vectoriel engendré par les deux vecteurs.

- a) Quelle peut être la dimension d'un sous-espace vectoriel supplémentaire de F_m (on discutera suivant la valeur de m) ?
- b) Trouver un tel sous-espace supplémentaire dans tous les cas.

Exercice 9:

Dans l'espace vectoriel \mathbb{R}^4 on considère deux sous-espaces vectoriels.

- a) Soit F le sous-espace vectoriel engendré par les trois vecteurs $u_1 = (1, 1, 2, 3)$, $u_2 = (-1, 1, 2, -2)$ et $u_3 = (-2, -1, 1, 2)$. A quelle(s) condition(s) doit satisfaire le vecteur (x, y, z, t) pour appartenir à F ?
- b) Soit G le sous-espace vectoriel engendré par les vecteurs $v_1 = (1, 2, 3, 0)$, $v_2 = (-1, 1, 2, -2)$ et $v_3 = (3, 0, -1, 4)$. A quelle(s) condition(s) doit satisfaire le vecteur (x, y, z, t) pour appartenir à G ?
- c) Donner une base du sous-espace vectoriel $F \cap G$. Ces deux sous-espaces vectoriels sont-ils supplémentaires ?
- d) Déterminer le sous-espace vectoriel $F + G$ (on en donnera une base et un système d'équation(s) le définissant).
- e) Trouver un supplémentaire de F (respectivement G) dans \mathbb{R}^4 .

Exercice 10:

On considère l'espace vectoriel réel $E = \mathbb{R}_n[X]$ des polynômes de degré au plus n (où $n \geq 2$). Soient x_1 et x_2 deux réels distincts.

- a) Montrer que l'ensemble F_1 (resp. F_2) des éléments de E formé des polynômes s'annulant en x_1 (resp. x_2) est un sous-espace vectoriel de E . Trouver sa dimension.
- b) Montrer de même que l'ensemble F des éléments de E formé des polynômes s'annulant en x_1 et en x_2 est un sous-espace vectoriel de E . Trouver sa dimension.
- c) Montrer que $F = F_1 + F_2$. Sont-ils supplémentaires ?

Exercice 11:

Soit E un espace vectoriel réel de dimension n ($n \geq 1$). Soit H un sous-espace vectoriel de E de dimension $n - 1$ (on parle d'hyperplan de E). Soit D une droite vectorielle de E (sous-espace vectoriel de dimension 1 de E). Montrer que soit D est contenue dans H soit $D \oplus H = E$.

Exercice 12:

Soit $E = \mathcal{C}(\mathbb{R}; \mathbb{R})$ l'espace vectoriel des fonctions continues sur \mathbb{R} . On note F le sous-espace vectoriel des fonctions (continues sur \mathbb{R}) qui valent 0 en 0. Montrer que la droite vectorielle (de E) engendrée par la fonction $x \mapsto \exp(x)$ est un supplémentaire dans E de F .