

ALGÈBRE LINÉAIRE.

Matrices. Calcul matriciel. Matrice d'une application linéaire.

1. Matrices.

Exercice 1:

Effectuer tous les produits possibles de deux matrices choisies parmi les quatre suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 & 0 \\ 8 & 5 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 3 & 3 \\ 9 & 5 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 8 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 0 \end{pmatrix}.$$

Exercice 2:

Calculer les inverses des matrices suivantes :

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix},$$
$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & -5 & 7 \\ 0 & 1 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 3 & 4 \\ 2 & -1 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Exercice 3:

On considère la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & a \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

où a est un paramètre réel.

- a) Calculer A^4 .
- b) Montrer que A est inversible si et seulement si $a \neq 0$.
- c) On suppose $a \neq 0$. Calculer A^{-1} , puis A^n pour tout entier $n \in \mathbb{Z}$.

Exercice 4:

Si M et N sont des matrices carrées d'ordre n ($n \geq 1$), on pose $[M, N] = MN - NM$. On remarquera que $[M, N] = 0$ si et seulement si M et N commutent. Soient les six matrices

$$M_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} ; M_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} ; M_3 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

et

$$M_4 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} ; M_5 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} ; M_6 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} .$$

Par exemple en utilisant $[M, N]$, déterminez lesquelles commutent entre elles.

Exercice 5:

Déterminer toutes les matrices qui commutent avec la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} .$$

Exercice 6:

Soit N la matrice

$$N = \begin{pmatrix} 0 & -2 & -3 & -4 \\ 0 & 0 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} .$$

- Calculer N^2 , N^3 et N^4 .
- Montrer que la matrice $\text{Id} + N + N^2 + N^3$ est l'inverse de la matrice $\text{Id} - N$.

Exercice 7:

Soit d un nombre réel. Soit \mathcal{C} l'ensemble des matrices carrées d'ordre 2 de la forme

$$\begin{pmatrix} x & dy \\ y & x \end{pmatrix}$$

où x et y sont des nombres réels. Montrer qu'il s'agit d'un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}(2 \dots \mathbb{R})$. Montrer qu'il est stable pour la multiplication interne des matrices et que les éléments de \mathcal{C} commutent entre eux. Montrer que tout élément non nul de \mathcal{C} admet un inverse. Montrer qu'il existe des éléments de \mathcal{C} dont le carré vaut

$$\begin{pmatrix} d & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix} .$$

On suppose désormais que $d = -1$. Trouver une bijection linéaire entre \mathcal{C} et \mathbb{C} .

2. Applications linéaires et Matrices.**Exercice 1:**

Soit

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}.$$

a) On considère l'application linéaire $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ représentée, dans les bases canoniques, par la matrice A . Calculer l'image par f du vecteur $(2, -1)$.

b) On considère l'application linéaire $f : \mathbb{R}_1[X] \rightarrow \mathbb{R}_2[X]$ représentée, dans les bases canoniques, par la matrice A . Calculer l'image par f du polynôme $p(x) = 3x + 4$.

Exercice 2:

Soit (e_1, e_2, e_3) la base canonique de \mathbb{R}^3 et f l'endomorphisme de \mathbb{R}^3 tel que

$$\begin{cases} f(e_1) = e_1 + 2e_2 \\ f(e_2) = e_1 + 6e_2 + 2e_3 \\ f(e_3) = e_1 - e_3 \end{cases}$$

Écrire la matrice de f dans la base canonique de \mathbb{R}^3 . Déterminer les sous-espaces vectoriels $\text{Ker } f$ et $\text{Im } f$.

Exercice 3:

On considère un espace vectoriel réel E de dimension 3. Soit $\{e_1, e_2, e_3\}$ une base de E . Soit l l'application linéaire dont la matrice dans cette base est donnée par

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

a) Déterminer le noyau et l'image de l . Calculer le rang de l .

b) Calculer la matrice de l^2 et montrer que $l^2 - 3l = 0$.

Exercice 4:

Soit $E = \mathbb{R}^5$ et $F = \mathbb{R}^4$. On considère l'application linéaire l de E dans F donnée par la matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 & 5 \\ 2 & 0 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 3 & 2 \\ 0 & 3 & -3 & 2 & 6 \end{pmatrix}.$$

Déterminer le noyau et l'image de l . On en donnera une base et un système d'équations.

Exercice 5:

On considère l'endomorphisme f_a de \mathbb{R}^3 représenté, dans la base canonique de \mathbb{R}^3 , par la matrice

$$M_a = \begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{pmatrix}.$$

- a) Discuter suivant le paramètre a , le rang de f_a .
- b) Déterminer le noyau et l'image de f_a .

Exercice 6:

On considère l'espace vectoriel réel $E = \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}; \mathbb{R})$ des fonctions indéfiniment dérivables sur \mathbb{R} .

a) Montrer que les vecteurs $x \mapsto \cos(x)\text{ch}(x) = u_1(x)$, $x \mapsto \sin(x)\text{ch}(x) = u_2(x)$, $x \mapsto \cos(x)\text{sh}(x) = u_3(x)$ et $x \mapsto \sin(x)\text{sh}(x) = u_4(x)$ forment un système libre dans E .

b) Soit F le sous-espace vectoriel de E engendré par les quatre vecteurs u_i . Déterminer la matrice M de l'application $f \mapsto f'$ dans cette base.

c) Calculer M^n pour $n \geq 1$.

Exercice 7:

Soit $E = \mathbb{R}_n[X]$ l'espace vectoriel des polynômes de degré au plus n ($n \in \mathbb{N}$). Donner la matrice de la dérivation des polynômes dans la base (canonique) des monômes.

Exercice 8:

On identifie $E = \mathbb{R}^2$ à \mathbb{C} . Déterminer la matrice (vis à vis de la base canonique de \mathbb{R}^2) de l'application linéaire qui, à (x, y) associe le vecteur (x', y') où

$$x' + iy' = e^{i\theta}(x + iy).$$

Exercice 9:

On considère un espace vectoriel réel E de dimension 3. Soit $\{e_1, e_2, e_3\}$ une base de E . Soit l l'application linéaire dont la matrice dans cette base est donnée par

$$\begin{pmatrix} 15 & -11 & 5 \\ 20 & -15 & 8 \\ 8 & -7 & 6 \end{pmatrix}.$$

Montrer que les vecteurs $f_1 = 2e_1 + 3e_2 + e_3$, $f_2 = 3e_1 + 4e_2 + e_3$ et $f_3 = e_1 + 2e_2 + 2e_3$ forment un système libre dans E . Ecrire dans cette nouvelle base la matrice de l'application l .

Exercice 10:

Dans \mathbb{R}^4 on considère la base canonique (e_1, e_2, e_3, e_4) et la suite

$$(e_1, e_1 + e_2, e_1 + e_2 + e_3, e_1 + e_2 + e_3 + e_4).$$

a) Montrer que cette dernière suite est une base de \mathbb{R}^4 . Ecrire les matrices de passage de la base canonique à cette nouvelle base et de cette nouvelle base à la base canonique.

- b) Soit $v = (1, -1, 3, -2)$. Calculer les coordonnées de v dans la nouvelle base.
c) Calculer le vecteur w dont les coordonnées, dans la nouvelle base, sont : $-2, 0, 4, 1$.

Exercice 11:

Soit E un espace vectoriel de dimension 3 et f un endomorphisme de E tel que $f \neq 0$ et $f^2 = 0$.

- a) Montrer que $\text{Im } f$ est inclus dans $\text{Ker } f$; en déduire le rang de f .
b) Soit e_3 un vecteur de E tel que $f(e_3) \neq 0$. On pose $e_2 = f(e_3)$. Montrer qu'il existe un vecteur $e_1 \in \text{Ker } f$ non proportionnel à e_2 . Montrer que (e_1, e_2, e_3) est une base de E et écrire la matrice de f dans cette base.
c) Application numérique : soit f l'endomorphisme de \mathbb{R}^3 dont la matrice, dans la base canonique, est

$$\begin{pmatrix} -3 & -6 & 3 \\ 2 & 4 & -2 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

Montrer que f satisfait les hypothèses ci-dessus. Choisir les vecteurs e_3 et e_1 et écrire la matrice de passage de la base canonique à la base (e_1, e_2, e_3) .