

ALGÈBRE LINÉAIRE.
Applications linéaires.

1. Généralités.

Exercice 1:

Montrer qu'il existe une et une seule application linéaire $f : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}$ telle que

$$f(10, 1, 2, 0) = 1, f(1, 2, 1, 0) = 2, f(2, 0, 1, 1) = 3, f(0, 0, 0, 2) = 4.$$

Calculer $f(1, 1, 1, 1)$.

Exercice 2:

Dans \mathbb{R}^3 , on considère les vecteurs $v_1 = (1, 1, 1)$, $v_2 = (2, 0, -3)$, $v_3 = (0, 2, 5)$.

a) Montrer qu'il n'existe pas d'application linéaire f , de \mathbb{R}^3 dans \mathbb{R}^3 , telle que $f(v_j) = e_j$ ($j = 1, 2, 3$) (où les vecteurs e_j sont les vecteurs de la base canonique de \mathbb{R}^3).

b) Montrer qu'il existe une infinité d'applications linéaires f , de \mathbb{R}^3 dans \mathbb{R}^3 , telles que

$$f(v_1) = e_1, \quad f(v_2) = e_2, \quad f(v_3) = 2e_1 - e_2$$

(Suggestion : on observera qu'il y a une infinité de manière de compléter (v_1, v_2) de façon à obtenir une base de \mathbb{R}^3).

Exercice 3:

Déterminer l'image, dans la base canonique de \mathbb{R}^3 , d'un vecteur u quelconque de \mathbb{R}^3 par les endomorphismes suivants :

a) le projecteur sur le plan d'équation $x - 2y + 5z = 0$, parallèlement au vecteur $(1, 1, -1)$.

b) la symétrie par rapport au vecteur $(1, 2, -1)$, parallèlement au plan d'équation $x + 3y - z = 0$.

Exercice 4:

Soit E un espace vectoriel. Soient u_1 et u_2 deux vecteurs de E . Soient l_1 et l_2 deux formes linéaires sur E . Montrer que l'application

$$\forall u \in E \quad u \mapsto l_1(u)u_2 - l_2(u)u_1$$

est une application linéaire de E dans E .

Exercice 5:

On considère l'application $u : \mathbb{R}_3[X] \rightarrow \mathbb{R}_3[X]$ telle que, pour tout $p \in \mathbb{R}_3[X]$, $u(p)$ soit le polynôme $x \mapsto p(x+1) - p(x)$. Montrer que u est une application linéaire.

Exercice 6:

Soit E l'espace vectoriel réel des fonctions réelles définies et dérivables deux fois sur \mathbb{R} .

a) Montrer que les applications $f \mapsto f(0)$, $f \mapsto f'(1)$ et $f \mapsto \int_0^1 f(t) dt$ sont des formes linéaires sur E .

b) Montrer que les applications $f \mapsto f(0) + 1$ et $f \mapsto (f'(2))^2$ ne sont pas des formes linéaires sur E .

Exercice 7:

Soit E l'espace vectoriel des suites numériques réelles. Soit q un nombre réel. Montrer que l'application qui, à toute suite numérique u , associe la suite v donnée par

$$\forall n \in \mathbb{N}, v_n = u_{n+1} - qu_n$$

est un endomorphisme de E .

Exercice 8:

Soit $E = \mathbb{R}^3$. Montrer que les deux formes linéaires sur E données par $((x, y, z) \mapsto x + 2y + 3z$ et $(x, y, z) \mapsto x - 2y + 3z$ sont linéairement indépendantes.

2. Noyau et Image d'une application linéaire.**Exercice 1:**

Déterminer l'image et le noyau de chacune des applications linéaires suivantes :

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}^2 &\rightarrow \mathbb{R} & f : \mathbb{R}^2 &\rightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x, y) &\mapsto 2x - 3y & (x, y) &\mapsto (x - 2y, 3x - 6y) \\ f : \mathbb{C}^2 &\rightarrow \mathbb{C}^2 & f : \mathbb{R}^2 &\rightarrow \mathbb{R}^3 \\ (x, y) &\mapsto (ix - y, x + iy) & (x, y) &\mapsto (3x + 5y, x - 2y, 2x - y) \\ f : \mathbb{R}^3 &\rightarrow \mathbb{R}^2 & & \\ (x, y, z) &\mapsto (x + 5y - z, -x + 2y - 2z) \end{aligned}$$

Exercice 2:

Soit (e_1, e_2, e_3) la base canonique de \mathbb{R}^3 et f l'endomorphisme de \mathbb{R}^3 tel que

$$\begin{cases} f(e_1) = e_1 + 2e_2 \\ f(e_2) = e_1 + 6e_2 + 2e_3 \\ f(e_3) = e_1 - e_3 \end{cases}$$

Déterminer les sous-espaces vectoriels $\text{Ker } f$ et $\text{Im } f$.

Exercice 3:

On considère l'application $u : \mathbb{R}_3[X] \rightarrow \mathbb{R}_3[X]$ telle que, pour tout $p \in \mathbb{R}_3[X]$, $u(p)$ soit le polynôme $x \mapsto p(x+1) - p(x)$. On rappelle que u est une application linéaire.

- a) Déterminer les sous-espaces vectoriels $\text{Ker } u$ et $\text{Im } u$.
- b) Plus généralement déterminer les sous-espaces $\text{Ker } u^k$, pour $k \in \mathbb{N}^*$.

Exercice 4:

Soit $f : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$ l'application linéaire définie par :

$$f(x, y, z, t) = (2x + y + 4z, x + y + 3z + t, 3x + 2y + 7z + t, x - y - z - 3t).$$

- a) Trouver une base du sous-espace $\text{Ker } f$; quelle est sa dimension ?
- b) Trouver une base et des équations du sous-espace $\text{Im } f$; quelle est sa dimension ?
- c) Soit E le sous-espace vectoriel de \mathbb{R}^4 engendré par les vecteurs $(1, 0, 0, 0)$ et $(0, 1, 0, 0)$. Montrer que l'on a $E \oplus \text{Ker } f = \mathbb{R}^4$.
- d) Soit $g : E \rightarrow \mathbb{R}^4$ l'application linéaire définie par $g(x) = f(x)$ pour tout $x \in E$. Montrer que g est injective et que l'on a $\text{Im } g = \text{Im } f$.

Exercice 5:

Soit $E = \mathbb{R}^2$. Soit f un endomorphisme non nul de E . On suppose par contre que $f^2 = f \circ f = 0$.

- a) Le noyau de f peut-il être réduit à $\{0\}$? Quelle peut-être la dimension de l'image de f ?
- b) Trouver un exemple d'une telle application linéaire.
- c) Construire toutes les applications f non nulles vérifiant $f^2 = 0$.

Exercice 6:

Soit f une application linéaire non nulle d'un espace vectoriel E de dimension finie supérieure ou égale à 2 dans un espace vectoriel F . Montrer que f est injective si et seulement si pour tout couple (E_1, E_2) de sous-espaces vectoriels de E tels que $E = E_1 \oplus E_2$ alors $f(E) = f(E_1) \oplus f(E_2)$.

Exercice 7:

Soient f et g deux projecteurs relatifs au même espace vectoriel E . Les propositions suivantes sont-elles équivalentes ?

- a) $\text{Ker } f = \text{Ker } g$
- b) $f = f \circ g$ et $g = g \circ f$

Exercice 8:

Soient f un endomorphisme d'un espace vectoriel E .

- a) Montrer que, si $\text{Ker } f = \text{Ker } f^2$, alors $f(E) \cap \text{Ker } f = \{0\}$. Réciproquement, montrer que, si f est tel que $f(E) \cap \text{Ker } f = \{0\}$, alors $\text{Ker } f = \text{Ker } f^2$.
- b) Montrer que, si $\text{Im } f = \text{Im } f^2$, alors $E = \text{Ker } f + f(E)$. Réciproquement, montrer que, si f est tel que $E = \text{Ker } f + f(E)$, alors $f^2(E) = f(E)$.

Exercice 9:

Soit E un espace vectoriel réel et soit f un endomorphisme de E . On notera $N(f)$ le noyau de l'endomorphisme f .

- a) Soit $m \geq 1$. Montrer que $f^m(E) \subset f^{m-1}(E)$.
- b) Soit $m \geq 1$. Montrer que $N(f^{m-1}) \subset N(f^m)$.
- c) Montrer qu'il existe un entier $p > 1$ tel que

$$\forall m \geq p \quad N(f^m) = N(f^p), \quad f^m(E) = f^p(E) \text{ et } f^p(E) \cap N(f^p) = \{0\}.$$

Exercice 10:

Soit $E = \mathbb{R}_{n-1}[X]$ l'espace vectoriel des polynômes réels de degré au plus $n - 1$ ($n \in \mathbb{N}^*$). Pour tout i dans $\{1, \dots, n\}$, on note P_i le polynôme défini par $P_i(j) = \delta_i^j$ ($j = 1, \dots, n$) où δ_i^j est le symbole de Kronecker (il est nul sauf si $i = j$ auquel cas, il vaut 1).

- a) Montrer que les P_i sont bien définis et forment une base de E .
- b) Montrer que l'application $P \mapsto \sum_{i=1}^n P(i)P_i$ est une application linéaire de E dans E . Montrer qu'elle est bijective.
- c) Déterminer les P_i et en déduire que

$$P(x) = \sum_{i=1}^n P(i)P_i(x).$$

3. Théorème du rang.**Exercice 1:**

Soit E un espace vectoriel de dimension 3 et f un endomorphisme de E tel que $f \neq 0$ et $f^2 = 0$.

- a) Montrer que $\text{Im } f$ est inclus dans $\text{Ker } f$; en déduire le rang de f .
- b) Soit e_3 un vecteur de E tel que $f(e_3) \neq 0$. On pose $e_2 = f(e_3)$. Montrer qu'il existe un vecteur $e_1 \in \text{Ker } f$ non proportionnel à e_2 . Montrer que (e_1, e_2, e_3) est une base de E et écrire la matrice de f dans cette base.
- c) Application numérique : soit f l'endomorphisme de \mathbb{R}^3 dont la matrice, dans la base canonique, est

$$\begin{pmatrix} -3 & -6 & 3 \\ 2 & 4 & -2 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

Montrer que f satisfait les hypothèses ci-dessus. Choisir les vecteurs e_3 et e_1 et écrire la matrice de passage de la base canonique à la base (e_1, e_2, e_3) .

Exercice 2:

Soit f un endomorphisme de l'espace vectoriel E , de dimension finie.

- a) Montrer les inclusions $\text{Ker } f \subset \text{Ker } f^2$, $\text{Im } f^2 \subset \text{Im } f$.
- b) Montrer l'équivalence entre les trois propriétés suivantes :

$$(1) \text{Ker } f^2 \subset \text{Ker } f \quad (2) \text{Im } f \subset \text{Im } f^2 \quad (3) \text{Ker } f \cap \text{Im } f = \{0\}.$$

Montrer que si l'une de ces conditions est satisfaite, les sous-espaces $\text{Ker } f$ et $\text{Im } f$ sont supplémentaires.

Exercice 3:

Soit f un endomorphisme de l'espace vectoriel E , de dimension finie n . Montrer l'équivalence entre les deux propriétés suivantes :

- a) $\text{Ker } f = \text{Im } f$,
- b) $(f^2 = 0)$ et $(n \text{ pair})$ et $(\text{rg } f = \frac{n}{2})$.

Exercice 4:

Soit E un espace vectoriel réel de dimension finie n . Soient l et h deux endomorphismes de E .

- a) Montrer que $l \circ h = 0$ si et seulement si $\text{Im}(h) \subset \text{Ker}(l)$.
- b) Soit $\{e_1, e_2, e_3\}$ une base de E . On considère l'application l définie par $l(e_1) = e_1$ et $l(e_i) = 0$ si $i > 1$ et l'application h définie par $h(e_2) = e_2$ et $h(e_i) = 0$ si $i \neq 2$. Déterminer les matrices respectives de l , h et $l \circ h$.
- c) Soit l un endomorphisme non nul de E . Quelle condition doit vérifier le noyau de l s'il existe un endomorphisme non nul h de E tel que $l \circ h = 0$? L'endomorphisme l est-il bijectif?

4. Applications linéaires particulières.**Exercice 1:**

Soit f l'endomorphisme de \mathbb{R}^3 dont la matrice, dans la base canonique, est

$$M = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & -1/2 \\ 1/2 & 1 & 1/2 \\ -1/2 & 0 & 1/2 \end{pmatrix}.$$

Montrer que f est un projecteur. On déterminera l'image et le noyau de f .

Exercice 2:

Dans l'espace $E = \mathbb{R}^2$, déterminer la matrice de la symétrie vectorielle par rapport à la droite $\mathbb{R}(1, 1)$ parallèlement à la droite $\mathbb{R}(1, 3)$.

Exercice 3:

Soit f l'endomorphisme de \mathbb{R}^3 dont la matrice, dans la base canonique, est

$$M = \begin{pmatrix} 3 & -16 & -12 \\ 2 & -9 & -6 \\ -2 & 8 & 5 \end{pmatrix}.$$

Montrer que f est une symétrie. On déterminera les sous-espaces $\text{Ker}(f - \text{Id}_E)$ et $\text{Ker}(f + \text{Id}_E)$.

Exercice 4:

Écrire les matrices, dans la base canonique de \mathbb{R}^3 des endomorphismes suivants :

a) le projecteur sur le plan d'équation $x - 2y + 5z = 0$, parallèlement au vecteur $(1, 1, -1)$.

b) la symétrie par rapport au vecteur $(1, 2, -1)$, parallèlement au plan d'équation $x + 3y - z = 0$.