

ANALYSE.

Limites. Fonctions continues.

1. Limites. Généralités.

Exercice 1:

Représenter graphiquement la fonction $x \mapsto |x + 1| - |x| + |x - 1|$.

Exercice 2:

En utilisant la définition “ $\varepsilon - \eta$ ” des limites :

— déterminer la limite de la fonction f au point a , pour

$$f(x) = x^2, a = 2 \quad ; \quad f(x) = \sqrt{x}, a = 4 \quad ; \quad f(x) = \frac{1}{x}, a = 3 ;$$

— déterminer la limite de la fonction f en 0, pour $f(x) = E(x)$ (partie entière de x).

— déterminer la limite de la fonction f en 0, pour la fonction définie sur \mathbb{R} par $f(0) = 0$ et $f(x) = \sin(1/x)$ pour $x \neq 0$.

— déterminer la limite de la fonction g en 0, pour la fonction définie sur \mathbb{R} par $g(0) = 0$ et $g(x) = x \sin(1/x)$ pour $x \neq 0$.

— déterminer la limite de la fonction f en 0, pour la fonction définie sur \mathbb{R} par $f(0) = 0$ et $f(x) = 1/x$ pour $x \neq 0$.

Exercice 3:

La fonction $x \mapsto \frac{x^3 - 2x^2 + 3x - 2}{x - 1}$ admet-elle une limite lorsque x tend vers 1 ?

Exercice 4:

La fonction $x \mapsto \frac{\sqrt{x} - 1}{\sqrt[3]{x} - 1}$ admet-elle une limite lorsque x tend vers 1 ?

Exercice 5:

a) Trouver une fonction continue et bornée $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ telle que $f(0) = 1$, $f(1) = 1/2$ et $f(3/2) = 4$.

b) Trouver une fonction polynomiale P telle que $P(0) = 1$, $P(1) = 1/2$ et $P(3/2) = 4$.

Exercice 6:

Trouver une fonction continue $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ telle que $f(0) = 1$, $f(1) = -1$ et $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = 0$.

Exercice 7:

Trouver toutes les fonctions f , définies et continues sur \mathbb{R} , telles que

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad |f(x)| = 2.$$

Exercice 8:

Soit f, g deux fonctions continues, définies sur \mathbb{R} , telles que

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad |f(x)| = |g(x)|.$$

a) On suppose que la fonction f ne s'annule pas sur \mathbb{R} . Montrer qu'on a $f = g$ ou $f = -g$.

b) Que peut-on conclure s'il existe un $a \in \mathbb{R}$ tel que $f(a) = 0$?

Exercice 9:

a) Montrer que

$$\begin{aligned} \text{Sup}(f, g)(x) &= \text{Sup}(f(x), g(x)) = \frac{f(x) + g(x) + |f(x) - g(x)|}{2} \\ \text{Inf}(f, g)(x) &= \text{Inf}(f(x), g(x)) = \frac{f(x) + g(x) - |f(x) - g(x)|}{2} \end{aligned}$$

b) Montrer que, si f et g sont continues en x_0 , alors $\text{Sup}(f, g)$ (resp. $\text{Inf}(f, g)$) est aussi continue en x_0 .

2. Fonctions continues.**Exercice 1:**

En utilisant le théorème des valeurs intermédiaires, montrer que la fonction $x \mapsto \tan x$ admet un point fixe dans l'intervalle $]\pi/2, 3\pi/2[$ ou, plus généralement, les intervalles $]\pi/2 + k\pi, 3\pi/2 + k\pi[$ (où k est un entier)

Exercice 2:

L'équation $(\cos x)(\ln x) = 1$ admet-elle une solution dans l'intervalle $]0, +\infty[$?

Exercice 3:

On pose $h(x) = x^2 - 3x + 2$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Quels sont les segments $[a, b]$, avec $a < b$, tels que h se restreint en une bijection h_0 de $[a, b]$ sur $h([a, b])$? Dans ce cas, déterminer h_0^{-1} .

Exercice 4:

Soit $J = [a, b]$ un intervalle fermé borné et $f : J \rightarrow J$ une fonction continue. Montrer que f admet au moins un *point fixe*, c'est-à-dire un nombre $c \in J$ tel que $f(c) = c$. On appliquera le théorème des valeurs intermédiaires à une fonction judicieusement choisie.

Exercice 5:

Simplifiez les expressions suivantes :

$$\begin{aligned} & \operatorname{Arcsin}(\sin 2x) \quad , \quad \operatorname{Arcsin} \frac{2\sqrt{x}}{1+x} \quad , \quad \operatorname{Arccos}(\sin x) \quad , \\ & \operatorname{Arctan} \left(\sqrt{1+x^2} - x \right) \quad , \quad \operatorname{Arccos} \frac{1-x^2}{1+x^2} \quad , \quad \operatorname{Arctan} \frac{\sqrt{1-x^2}}{x} . \end{aligned}$$

Exercice 6:

a) Établir la formule

$$\operatorname{Arctan}(a) + \operatorname{Arctan}(b) = \operatorname{Arctan} \left(\frac{a+b}{1-ab} \right)$$

pour tous nombres a, b tels que $ab < 1$

b) Y-a-t'il une ou des formules analogues pour $ab \geq 1$?

En déduire que les nombres suivants sont tous égaux à $\pi/4$ (il s'agit de formules utilisées historiquement pour calculer π) :

$$\begin{aligned} & \operatorname{Arctan} \frac{1}{2} + \operatorname{Arctan} \frac{1}{3} \quad , \quad 2\operatorname{Arctan} \frac{1}{3} + \operatorname{Arctan} \frac{1}{7} \quad , \\ & \operatorname{Arctan} \frac{1}{2} + \operatorname{Arctan} \frac{1}{5} + \operatorname{Arctan} \frac{1}{8} \quad (\text{Strassnitzky, 1840}) \quad , \\ & 2\operatorname{Arctan} \frac{1}{2} - \operatorname{Arctan} \frac{1}{7} \quad , \quad 4\operatorname{Arctan} \frac{1}{5} - \operatorname{Arctan} \frac{1}{239} \quad (\text{Machin, 1706}) . \end{aligned}$$

Retrouver les quatre premières formules par une méthode purement géométrique.

Exercice 7:

Résoudre l'équation

$$\operatorname{Arctan} \left(\frac{1}{x} \right) + \operatorname{Arctan} \left(\frac{1}{x-3} \right) + \operatorname{Arctan} \left(\frac{1}{x+3} \right) = \frac{\pi}{4} .$$

On vérifiera que x est solution d'une équation du troisième degré dont une racine est entière.

Exercice 8:

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction *continue* telle que

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \forall y \in \mathbb{R} \quad f(x+y) = f(x) + f(y) .$$

Montrer qu'il existe un réel α tel que $f(x) = \alpha x$ pour tout réel x (Indication : on calculera la valeur de α et on prouvera la relation pour x entier, puis pour x rationnel).