

# ALGÈBRE LINÉAIRE.

## Espaces vectoriels. Feuille n°1.

### Correction de l'exercice 1.3.

#### Exercice 3:

On considère l'ensemble  $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$  des applications de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$ . C'est un espace vectoriel réel. Les sous-ensembles suivants sont-ils des sous-espaces vectoriels ?

$$E_1 = \{ f : f(0) = 1 \}, E_2 = \{ f : f(1) = 0 \}, E_3 = \{ f : f(1) = 2f(0) \},$$

$$E_4 = \{ f : f(1) = f(0) + 2 \} \quad , \quad E_5 = \{ f : (\forall x \in \mathbb{R}) f(x) \leq 0 \}$$

et enfin l'ensemble  $E_8$  des polynômes de degré 3. Considérons le sous-espace vectoriel des applications de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$  dérivables. Les sous-ensembles

$$E_6 = \{ f : f' + f = 0 \} \quad , \quad E_7 = \{ f : f' + f = 1 \}$$

sont-ils des sous-espaces vectoriels ?

**Indications** L'ensemble  $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$  des applications de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$  est bien un espace vectoriel car on sait ajouter deux telles applications  $f$  et  $g$  ; c'est l'application qui, à tout  $x$  de  $\mathbb{R}$ , associe  $f(x) + g(x)$  et on sait, de même, multiplier par un scalaire  $\lambda$  une application  $f$  ; c'est l'application qui, à tout  $x$  de  $\mathbb{R}$ , associe  $\lambda f(x)$ . Et les propriétés (associativité, commutativité et distributivité) de ces opérations sont immédiates.

On sait qu'un sous-espace vectoriel de  $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$  doit être non vide et doit contenir l'application nulle. Une telle application ne peut valoir 1 en un point quelconque (dont 0). Donc  $E_1$  ne peut contenir l'application nulle. De même, l'application nulle ne peut vérifier  $0 = 0 + 2$  donc  $E_4$  ne peut contenir l'application nulle. Ni  $E_1$  ni  $E_4$  ne sont donc des sous-espaces vectoriels de  $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ .

Examinons la partie  $E_5$ . Il s'agit des applications de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$  qui sont positives (ou nulles) c'est à dire que toutes leurs valeurs sont positives ou nulles. Une telle partie ne peut être homogène (c'est à dire stable par multiplication par un scalaire quelconque). Il suffit d'étudier pour cela  $-f$ . En effet

$$\forall x \in \mathbb{R} ; f(x) \leq 0 \Rightarrow -f(x) \geq 0 .$$

Ainsi, dès que  $f$  est non nulle dans  $E_5$  (et cela existe, prendre  $-x^2$ ),  $-f$  ne peut appartenir à  $E_5$ . Donc  $E_5$  n'est pas un sous-espace vectoriel de  $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ .

Montrons que les parties  $E_2$  et  $E_3$  sont des sous-espaces vectoriels de  $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ . Ce sont des parties qui, toutes deux, contiennent l'application nulle donc elles sont non vides. Prenons deux scalaires quelconques  $\lambda$  et  $\mu$  et deux éléments  $f$  et  $g$  dans  $E_2$  (resp. dans  $E_3$ ). Alors

$$(\lambda f + \mu g)(1) = \lambda f(1) + \mu g(1) = 0$$

$$\text{resp. } (\lambda f + \mu g)(1) = \lambda f(1) + \mu g(1) = 2\lambda f(0) + 2\mu g(0) = 2(\lambda f + \mu g)(0) .$$

Nous venons bien de vérifier que toute combinaison linéaire de vecteurs de  $E_2$  (resp.  $E_3$ ) reste dans  $E_2$  (resp.  $E_3$ ).

La partie  $E_8$  des polynômes de degré 3 ne peut être un sous-espace vectoriel car elle ne contient pas le polynôme nul. Nous verrons, lors de l'étude des polynômes, qu'il faut plutôt considérer la partie  $E_9$  des polynômes de degré au plus 3 pour obtenir un sous-espace vectoriel.

Enfin l'ensemble des fonctions dérivables est un sous-espace vectoriel de  $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$  (la dérivée d'une combinaison linéaire de fonctions dérivables est la combinaison linéaire des dérivées et la fonction nulle est dérivable). La condition  $f' + f = 1$  n'est pas satisfaite par la fonction nulle donc  $E_7$  ne peut être un sous-espace vectoriel. Par contre, la fonction nulle vérifie la condition  $f' + f = 0$  donc  $E_6$  est non vide. De plus

$$(\lambda f + \mu g)' + (\lambda f + \mu g) = \lambda(f' + f) + \mu(g' + g) = 0$$

aussi  $E_6$  est non vide et stable par combinaison linéaire donc c'est bien un sous-espace vectoriel de  $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ .