

# Correction de l'exercice 13 TD 1

Andrei Benguş-Lasnier

**Commentaire.** Entre parenthèses je rajoute des commentaires explicatifs. Ne les reprenez pas le jour où on vous demande de rédiger un exercice.

**Résumé.** En face d'un système d'équations linéaires, nous pouvons nous poser un certain nombre de questions :

- Est-ce qu'il a des solutions ?
- S'il a des solutions comment les trouver toutes de la façon la plus simple et la plus claire ?
- Parfois nous rencontrons des systèmes d'équations redondantes. Comment savoir s'il y en a et comment s'en débarrasser ?
- etc.

Afin d'y répondre à ces questions, nous allons appliquer le pivot de Gauss qui consiste à passer de notre système linéaire et à en trouver un système équivalent, qui est échelonné. Un système échelonné est bien plus aisé à comprendre, nous pouvons LIRE les réponses aux questions que l'on se pose.

Souvenez vous que résoudre un système inhomogène revient à résoudre le système homogène associé tout en effectuant les mêmes opérations sur le membre de droite.

Un gros avantage du pivot de Gauss est son côté algorithmique : vous pouvez implémenter le pivot de Gauss sur Python, SageMaths, etc. Essentiellement nous faisons les choses suivantes :

1. permuter les lignes pour ramener celle où la variable "la plus à gauche" (ça peut ne pas être  $x_1$  des fois) tout en haut
2. utiliser cette dernière pour supprimer cette même variable de toutes les autres équations
3. vous vous retrouvez avec votre première ligne qui n'a pas changé et les  $n - 1$  autres équations. Ces dernières ont une variable en moins et vous allez vous concentrer sur le système formé par celles-ci.
4. vous reprenez les étapes 1 2 et 3 avec le système de ces  $n - 1$  équations et vous vous arrêtez quand vous n'avez plus d'équations à traiter.

**Passons maintenant à l'exercice. a)** (Le but ici est comme vous vous doutez d'arriver à un système échelonné, mais nous avons le paramètre  $m$  qui peut être gênant car selon ses valeurs on se ramener à diviser par 0 ce qui est une catastrophe. Il faut être un minimum astucieux et optimiste : utilisons les équations où les coefficients sont les plus simples et espérons que nous allons nous retrouver avec des systèmes simples après aussi.)

$$\Leftrightarrow L_1 \longleftrightarrow L_2 \begin{cases} (m-2)x + 2y - z = 0 \\ 2x + my + 2z = 0 \\ 2mx + 2(m+1)y + (m+1)z = 0 \end{cases}$$

(Ici j'ai mis en haut une équation où le coefficient devant  $x$  ne dépend pas de  $m$ . Maintenant je vais juste l'ajouter à ma deuxième ligne afin de ne plus avoir le  $m - 2$ . Ici c'est vraiment une question de goût.)

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow L_2 &\leftarrow L_2 + L_1 \begin{cases} 2x + my + 2z = 0 \\ mx + (2+m)y + z = 0 \\ 2mx + 2(m+1)y + (m+1)z = 0 \end{cases} \\ \Leftrightarrow L_2 &\leftarrow L_2 - \frac{m}{2}L_1 \begin{cases} 2x + my + 2z = 0 \\ (-\frac{m^2}{2} + m + 2)y + (1-m)z = 0 \\ L_3 &\leftarrow L_3 - mL_1 \begin{cases} (-m^2 + 2m + 2)y + (1-m)z = 0 \end{cases} \end{cases} \end{aligned}$$

(Ici le système paraît un peu compliqué, mais en vérité il est bien plus simple si nous inversons l'ordre des variables  $z$  et  $y$ . Parfois il faut être astucieux mais pas trop non-plus.)

$$\begin{aligned} & \Leftrightarrow \begin{cases} 2x + 2z + my = 0 \\ (1-m)z + (-\frac{m^2}{2} + m + 2)y = 0 \\ (1-m)z + (-m^2 + 2m + 2)y = 0 \end{cases} \\ \Leftrightarrow L_3 \leftarrow L_3 - L_2 & \begin{cases} 2x + 2z + my = 0 \\ (1-m)z + (-\frac{m^2}{2} + m + 2)y = 0 \\ (-\frac{m^2}{2} + m)y = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

(Ici nous pouvons faire un travail de simplification : d'abord on regarde le dernier coefficient, puis on peut se débarrasser de la présence de  $m$  dans le coefficient de  $y$  dans la deuxième équation.)

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow L_2 \leftarrow L_2 - L_3 & \begin{cases} 2x + 2z + my = 0 \\ (1-m)z + 2y = 0 \\ -\frac{m}{2}(m-2)y = 0 \end{cases} \\ \Leftrightarrow L_3 \leftarrow -2L_3 & \begin{cases} 2x + 2z + my = 0 \\ (1-m)z + 2y = 0 \\ m(m-2)y = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

(Comme à chaque fois, on a envie de voir s'il y a des équations redondantes/inutiles. Concrètement on cherche le rang du système en fonction du paramètre  $m$ .)

Les coefficients diagonaux s'annulent en 0, 1 ou 2, nous donnant une équation inutile à chaque fois :

— Si  $m = 1$  alors  $m(m-2) \neq 0$  et on peut simplifier le coefficient devant  $y$  :

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow L_3 \leftarrow \frac{1}{m(m-2)}L_3 & \begin{cases} 2x + 2z + my = 0 \\ 2y = 0 \\ y = 0 \end{cases} \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} 2x + 2z = 0 \\ y = 0 \end{cases} \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} x = -z \\ y = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

Le système est de rang 2.

— Si  $m \in \{0, 2\}$  alors  $1 - m \neq 0$  (ici je préfère revenir à placer la variable  $y$  en 2ème position et  $z$  en 3ème, comme ça je travaille le moins que possible avec  $m$ ) :

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow & \begin{cases} 2x + 2z + my = 0 \\ (1-m)z + 2y = 0 \\ 0 = 0 \end{cases} \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} 2x + my + 2z = 0 \\ 2y + (1-m)z = 0 \end{cases} \\ \Leftrightarrow L_1 \leftarrow L_1 - \frac{m}{2}L_2 & \begin{cases} 2x + \frac{m+3}{2}z = 0 \\ 2y + (1-m)z = 0 \end{cases} \\ \Leftrightarrow L_1 \leftarrow L_1 - \frac{m}{2}L_2 & \begin{cases} x = -\frac{m+3}{4}z \\ y = \frac{m-1}{2}z \end{cases} \end{aligned}$$

— Si  $m \notin \{0, 1, 2\}$  alors on peut simplifier nos pivots :

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow & \begin{aligned} & L_2 \leftarrow \frac{1}{1-m}L_2 \\ & L_3 \leftarrow \frac{1}{m(m-2)}L_3 \end{aligned} \begin{cases} 2x + 2z + my = 0 \\ + z + \frac{2}{1-m}y = 0 \\ y = 0 \end{cases} \\ \Leftrightarrow & \begin{aligned} & L_1 \leftarrow L_1 - mL_3 \\ & L_2 \leftarrow L_2 - \frac{2}{1-m}L_3 \end{aligned} \begin{cases} 2x + 2z = 0 \\ z = 0 \\ y = 0 \end{cases} \\ \Leftrightarrow & \begin{aligned} & L_1 \leftarrow L_1 - 2L_2 \\ & L_1 \leftarrow 1/2L_1 \end{aligned} \begin{cases} x = 0 \\ z = 0 \\ y = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

Le système est de rang 3. C'est un système de Cramer.

b) (Tout l'intérêt d'effectuer ces opérations en détail est de pouvoir passer au système homogène juste en faisant les calculs sur le deuxième membre.)

On reprend les opérations effectuées sur le système homogène et on les applique au système inhomogène :

$$\begin{aligned} & \begin{cases} (m-2)x + 2y - z = a \\ 2x + my + 2z = b \\ 2mx + 2(m+1)y + (m+1)z = c \end{cases} \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} 2x + 2z + my = b \\ (1-m)z + 2y = 2a + 2b + c \\ m(m-2)y = 2a + (m+1)b - 2c \end{cases} \end{aligned}$$

On reprend la même distinction de cas :

— Si  $m = 1$  alors :

$$\begin{aligned} & \Leftrightarrow \begin{cases} 2x + 2z + y = b \\ 2y = 2a + 2b + c \\ -y = 2a + 2b - 2c \end{cases} \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} L_1 \leftarrow L_1 + L_3 \\ L_2 \leftarrow L_2 + 2L_3 \end{cases} \begin{cases} 2x + 2z = 2a + 3b - 2c \\ 0 = 6a + 6b - 3c \\ -y = 2a + 2b - 2c \end{cases} \end{aligned}$$

Le système est donc compatible (autrement dit il n'est pas contradictoire et a des solutions) ssi  $6a + 6b - 3c = 0 \Leftrightarrow 2a + 2b = c$  et dans ce cas on a

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = -z - a + \frac{1}{2}b \\ y = 2a + 2b \end{cases}$$

— Si  $m \in \{0, 2\}$  alors :

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x + 2z + my = b \\ (1-m)z + 2y = 2a + 2b + c \\ 0 = 2a + (m+1)b - 2c \end{cases}$$

Ainsi le système est compatible ssi  $2a + (m+1)b - 2c = 0$ . Dans ce cas on a alors :

$$\begin{aligned} & \Leftrightarrow \begin{cases} 2x + my + 2z = b \\ 2y + (1-m)z = 2a + 2b + c \end{cases} \\ \Leftrightarrow & L_1 \leftarrow L_1 - \frac{m}{2}L_2 \begin{cases} 2x + \frac{m+3}{2}z = -a - \frac{1}{2}c \\ 2y + (1-m)z = 2a + 2b + c \end{cases} \\ \Leftrightarrow & L_1 \leftarrow L_1 - \frac{m}{2}L_2 \begin{cases} x = -\frac{m+3}{4}z - a - \frac{1}{2}c \\ y = \frac{m-1}{2}z + a + b + \frac{1}{2}c \end{cases} \end{aligned}$$

— Si  $m \notin \{0, 1, 2\}$ , le système est de Cramer et nous avons les solutions suivantes :

$$\begin{aligned} & \Leftrightarrow \begin{cases} L_2 \leftarrow \frac{1}{1-m}L_2 \\ L_3 \leftarrow \frac{1}{m(m-2)}L_3 \end{cases} \begin{cases} 2x + 2z + \frac{2}{1-m}y = b \\ z + \frac{2}{1-m}y = \frac{2a+2b-c}{1-m} \\ y = \frac{2a+(m+1)b-2c}{m(m-2)} \end{cases} \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} L_1 \leftarrow L_1 - mL_3 \\ L_2 \leftarrow L_2 - \frac{2}{1-m}L_3 \end{cases} \begin{cases} 2x + 2z = -\frac{2a+3b-2c}{m-2} \\ z = \frac{2a+2b-c}{1-m} - \frac{2}{1-m} \frac{2a+(m+1)b-2c}{m(m-2)} \\ y = \frac{2a+(m+1)b-2c}{m(m-2)} \end{cases} \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} L_1 \leftarrow L_1 - 2L_2 \\ L_1 \leftarrow 1/2L_1 \end{cases} \begin{cases} x = -\frac{2a+3b-2c}{m-2} - 2\frac{2a+2b-c}{1-m} + 2\frac{2}{1-m} \frac{2a+(m+1)b-2c}{m(m-2)} \\ z = \frac{2a+2b-c}{1-m} - \frac{2}{1-m} \frac{2a+(m+1)b-2c}{m(m-2)} \\ y = \frac{2a+(m+1)b-2c}{m(m-2)} \end{cases} \end{aligned}$$

Pour les jusqu'au-boutistes

$$\left\{ \begin{array}{lcl} x & = & \frac{1}{2m(m-1)(m-2)} [2(m^2 - 3m - 4)a + (m^2 - 9m - 4)b + (4m + 8)c] \\ z & = & \frac{1}{m(m-1)(m-2)} [2(m^2 - m - 2)a + 2(m^2 - 3m - 1) - (m^2 - 2m + 4)c] \\ y & = & \frac{1}{m(m-2)} [2a + (m+1)b - 2c] \end{array} \right.$$