

ALGÈBRE LINÉAIRE.

Rappels sur les systèmes linéaires.

Exercice 1:

a) Résoudre le système linéaire (homogène) suivant

$$\begin{cases} 8x_1 + 3x_2 = 0 \\ 2x_1 + 6x_2 = 0 \end{cases} .$$

b) Résoudre le système linéaire (inhomogène) suivant

$$\begin{cases} 8x_1 + 3x_2 = 3 \\ 2x_1 + 6x_2 = -1 \end{cases} .$$

Exercice 2:

a) Résoudre le système linéaire (homogène) suivant

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 0 \\ x_1 + x_2 + 3x_3 = 0 \end{cases} .$$

b) Résoudre le système linéaire (inhomogène) suivant

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 1 \\ x_1 + x_2 + 3x_3 = 1 \end{cases} .$$

c) Résoudre le système linéaire (inhomogène) suivant

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 1 \\ x_1 + x_2 + 3x_3 = -1 \end{cases} .$$

Exercice 3:

a) Résoudre le système linéaire (homogène) suivant

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 = 0 \\ 3x_2 - x_3 = 0 \\ -2x_1 + 2x_3 = 0 \end{cases} .$$

b) Résoudre le système linéaire (inhomogène) suivant

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 = 1 \\ 3x_2 - x_3 = -1 \\ -2x_1 + 2x_3 = 1 \end{cases} .$$

Exercice 4:

a) Résoudre le système linéaire (homogène) suivant

$$\begin{cases} x_1 + x_2 & = 0 \\ x_1 & - x_3 = 0 \\ x_1 - x_2 - x_3 & = 0 \end{cases}.$$

b) Résoudre le système linéaire (inhomogène) suivant

$$\begin{cases} x_1 + x_2 & = -1 \\ x_1 & - x_3 = 1 \\ x_1 - x_2 - x_3 & = -1 \end{cases}.$$

Exercice 5:

Résoudre le système linéaire (homogène) suivant

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 & - x_4 + 5x_5 = 0 \\ 2x_1 & + 2x_3 + x_5 = 0 \\ x_1 + x_2 - x_3 + 3x_4 + 2x_5 & = 0 \\ & 3x_2 - 3x_3 + 2x_4 + 6x_5 = 0 \end{cases}.$$

Exercice 6:

a) Résoudre le système linéaire suivant

$$\begin{cases} 2x + y + z & = 3 \\ x - y + 3z & = 8 \\ x + 2y - z & = -3 \end{cases}.$$

b) Résoudre le système linéaire suivant

$$\begin{cases} 2x + y + z & = 3 \\ x - y + 3z & = 8 \\ x + 2y - z & = -3 \\ x + y + 2z & = -1 \end{cases}.$$

Exercice 7:

Résoudre le système linéaire suivant

$$\begin{cases} 3x + \frac{1}{2}y - z & = 0 \\ \frac{1}{2}x - y + 2z & = -\frac{13}{4} \\ x + \frac{1}{2}y - z & = 1 \end{cases}.$$

Exercice 8:

Résoudre le système linéaire suivant

$$\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 & = 4 \\ 4x_1 + 3x_2 - x_3 + 2x_4 & = 6 \\ 8x_1 + 5x_2 - 3x_3 + 4x_4 & = 12 \\ 3x_1 + 3x_2 - 2x_3 + 2x_4 & = 6 \end{cases}.$$

Exercice 9:

Résoudre le système linéaire suivant

$$\begin{cases} 3x + y - z = 0 \\ x - y + 2z = b \\ x + y - z = 1 \end{cases}.$$

On discutera suivant les valeurs du paramètre réel b .

Exercice 10:

Résoudre et discuter en fonction des valeurs des paramètres réels t et u le système

$$\begin{cases} x + ty + uz = 0 \\ tx + y + uz = 0 \\ ux + ty + z = 0 \end{cases}.$$

Exercice 11:

Résoudre le système linéaire suivant

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_4 + 5x_5 = a \\ 2x_1 + 2x_3 + x_5 = b \\ x_1 + x_2 - x_3 + 3x_4 + 2x_5 = c \\ 3x_2 - 3x_3 + 2x_4 + 6x_5 = d \end{cases}.$$

On discutera suivant les valeurs des paramètres réels a , b , c et d .

Exercice 12:

On considère les paramètres réels non nuls a_1 , a_2 et a_3 ainsi que les paramètres réels b_1 , b_2 et b_3 . Résoudre le système

$$\begin{cases} a_3y - a_2z = b_1 \\ -a_3x + a_1z = b_2 \\ a_2x - a_1y = b_3 \end{cases}.$$

Résoudre et discuter en fonction des valeurs des paramètres réels.

Exercice 13:

Soit m un paramètre réel.

a) Discuter suivant les valeurs du paramètre m et résoudre le système homogène

$$\begin{cases} (m-2)x + 2y - z = 0 \\ 2x + my + 2z = 0 \\ 2mx + 2(m+1)y + (m+1)z = 0 \end{cases}.$$

b) Soient a , b et c des paramètres réels. Discuter suivant les valeurs des paramètres m , a , b et c et résoudre le système

$$\begin{cases} (m-2)x + 2y - z = a \\ 2x + my + 2z = b \\ 2mx + 2(m+1)y + (m+1)z = c \end{cases}.$$

Exercice 14:

Déterminer les valeurs du paramètre réel u pour lesquelles le système linéaire suivant admet des solutions autres que la solution triviale :

$$\begin{cases} ux + y + z + t = 0 \\ x + (1+u)y + z + t = 0 \\ x + y + (2+u)z + t = 0 \\ x + y + z + t = 0 \end{cases}.$$

Exercice 15:

A quelle condition sur le paramètre réel a le système linéaire suivant admet-il une solution unique ?

$$\begin{cases} y + az + a^2t = 1 \\ x + a^2z + at = -1 \\ ax + a^2y + t = 1 \\ a^2x + ay + z = 1 \end{cases}.$$

Le résoudre dans ce cas.

Exercice 16:

Résoudre le système linéaire suivant :

$$\begin{cases} ax + y + z = 4 \\ x + by + z = 3 \\ x + 2by + z = 4 \end{cases}$$

(on discutera en fonction des valeurs des paramètres réels a et b).

Exercice 17:

Résoudre le système linéaire suivant :

$$\begin{cases} x + ay + a^2z = a^3 \\ x + by + b^2z = b^3 \\ x + cy + c^2z = c^3 \end{cases}$$

(on discutera en fonction des valeurs des paramètres réels a , b et c).

Exercice 18:

On considère la matrice

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 0 & 4 \\ 1 & -4 & -2 & 2 \end{pmatrix}$$

et les matrices colonnes

$$B_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad B_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad B_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Résoudre les trois systèmes $MX = B_i$ ($i = 1, 2, 3$). On précisera de combien de lignes est composée la matrice colonne X pour que ces systèmes aient un sens.