

POLYNÔMES.

Feuille n°1

**Généralités.**

**Exercice 1:**

Déterminer les polynômes  $PQ$ ,  $P^2 + Q^2$ ,  $QR$  et  $4R^2 - P^2$  lorsque

$$P = 1 + 3X + 2X^2, \quad Q = 2 - 4X + 3X^2 \text{ et } R = -4 + 2X + X^2.$$

On commencera par en déterminer le degré.

**Exercice 2:**

On considère le polynôme

$$P_a = 3 + aX + 7X^2 + 4X^3 + X^4$$

où  $a$  est un paramètre entier relatif. Déterminer  $a$  pour que  $P$  soit le produit de deux polynômes de degré 2 à coefficients entiers.

**Exercice 3:**

Même question pour le polynôme

$$Q_a = 8 - 4X + aX^2 - 4X^3 + X^4$$

où  $a$  est un paramètre entier relatif.

**Exercice 4:**

Calculer par récurrence le polynôme

$$(1 + X)(1 + X^2) \dots (1 + X^{2^n}).$$

**Exercice 5:**

Calculer le coefficient de  $X^p$  dans le polynôme  $(1 + X + \dots + X^n)^2$  puis dans le polynôme

$$(1 + X + X^2 + \dots + X^n)(1 + 2X + \dots + nX^{n-1}).$$

**Polynômes et algèbre linéaire.**

**Exercice 1:**

Dans l'espace vectoriel  $E = \mathbb{R}_2[X]$  des polynômes de degré au plus 2, vérifier que les polynômes  $P_1 = X^2$ ,  $P_2 = (X - 1)^2$  et  $P_3 = (X + 1)^2$  forment une base de  $E$ . Trouver les coordonnées des polynômes  $P = 12$  et  $Q = 3X^2 - 10X + 1$ .

**Exercice 2:**

Montrer que les polynômes  $1$ ,  $X$ ,  $X(X - 1)$  et  $X(X - 1)(X - 2)$  forment une base de  $\mathbb{R}_3[X]$  et déterminer les coordonnées du polynôme  $1 + X^3$  dans cette base.

**Exercice 3:**

On considère l'espace vectoriel des polynômes de degré au plus 3 . On pose  $P_0 = 1$  ,  $P_1 = 1 + X$  ,  $P_2 = \frac{1}{2}(1 + X)(2 + X)$  et  $P_3 = \frac{1}{6}(1 + X)(2 + X)(3 + X)$  . Montrer que  $\{P_0, P_1, P_2, P_3\}$  forme une base de  $\mathbb{R}_3[X]$  .

Montrer plus généralement que les polynômes  $P_k = \frac{1}{k!}(1 + X)(2 + X) \dots (k + X)$  (pour  $k = 1, 2, \dots, n$ ) forment une base de  $\mathbb{R}_n[X]$  , l'espace vectoriel des polynômes de degré au plus  $n$  .

**Exercice 4:**

On considère l'espace vectoriel  $\mathbb{R}_2[X]$  des polynômes de degré au plus 2 et les polynômes

$$P_1(x) = (X - 1)^2 \quad , \quad P_2(x) = (2X + 1)^2 \quad \text{et} \quad P_3(x) = uX + 3 ,$$

où  $u$  est un paramètre réel.

a) À quelle condition sur le paramètre  $u$  le vecteur  $P_3$  est-il une combinaison linéaire de  $P_1$  et  $P_2$  ?

b) On suppose cette condition vérifiée. Montrer que  $P_1$  est une combinaison linéaire de  $P_2$  et  $P_3$  et que  $P_2$  est une combinaison linéaire de  $P_1$  et  $P_3$  .

c) On suppose que cette condition n'est pas vérifiée. Montrer que tout vecteur de  $\mathbb{R}_2[X]$  est une combinaison linéaire de  $P_1$  ,  $P_2$  et  $P_3$  .

**Exercice 5:**

Dans l'espace vectoriel  $\mathbb{R}_3[X]$  des polynômes de degré au plus 3 , on considère la suite  $(P_1, P_2, P_3, P_4)$  , où

$$P_1 = (1 - X)^3 , P_2 = X(1 - X)^2 , P_3 = X^2(1 - X) , P_4 = X^3 .$$

Calculer les coordonnées de  $P_j$  dans la base canonique de  $\mathbb{R}_3[X]$  ; en déduire que la suite  $(P_1, P_2, P_3, P_4)$  est une base de  $\mathbb{R}_3[X]$  .

**Exercice 6:**

On considère  $E = \mathbb{R}_3[X]$  l'espace vectoriel des polynômes de degré au plus 3 . Soit  $F_1$  le sous-espace vectoriel engendré par  $P_1 = 5 + X + X^2 + X^3$  ,  $P_2 = -1 + 6X + X^2 + 3X^3$  ,  $P_3 = -16 + 3X - 2X^2$  et  $P_4 = 3 + 4X^2 + X^3$  . On considère également  $F_2$  le sous-espace vectoriel engendré par  $Q_1 = 6 + 3X + X^2$  ,  $Q_2 = -3 + 6X + 10X^2 + 3X^3$  et  $Q_3 = 3 - X - 3X^2 - X^3$  .

a) Trouver une base de  $F_1$  et une base de  $F_2$  .

b) Donner une base du sous-espace vectoriel  $F_1 + F_2$  .

c) Donner une base du sous-espace vectoriel  $F_1 \cap F_2$  .

**Exercice 7:**

Soit  $E = \mathbb{R}_3[X]$  l'espace vectoriel des polynômes de degré au plus 3 . Montrer que le système

$$\{1 - X^3, X(1 - X^2), X^2(1 - X), X^3\}$$

forme une base de  $E$  . Donner la matrice de passage de la base canonique à cette nouvelle base. En déterminer l'inverse.