

ALGÈBRE LINÉAIRE.

Quelques commentaires sur un exercice.

Exercice 1:

Résoudre le système linéaire suivant :

$$\begin{cases} ax + y + z = 4 \\ x + by + z = 3 \\ x + 2by + z = 4 \end{cases}$$

(on discutera en fonction des valeurs des paramètres réels a et b).

La première observation est que ce système s'écrit sous forme matricielle de la façon suivante :

$$\begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & b & 1 \\ 1 & 2b & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

Mais on peut également l'écrire sous la forme

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & a \\ 1 & b & 1 \\ 1 & 2b & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z \\ y \\ x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

en échangeant l'ordre des variables pour tenir compte du fait que tous les coefficients de la variable z ont des valeurs indépendantes des paramètres. Il est alors facile de démarrer l'échelonnement de la matrice en retranchant aux deux dernières lignes la première ligne :

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & a \\ 0 & b-1 & 1-a \\ 0 & 2b-1 & 1-a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z \\ y \\ x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix};$$

on peut poursuivre en retranchant la deuxième ligne à la troisième :

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & a \\ 0 & b-1 & 1-a \\ 0 & b & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z \\ y \\ x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

soit encore

$$\begin{pmatrix} 1 & a & 1 \\ 0 & 1-a & b-1 \\ 0 & 0 & b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z \\ x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Notre matrice est alors sous une forme proche d'une matrice échelonnée. On peut commencer la discussion.

Soit $a = 1$ et la matrice devient

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & b-1 \\ 0 & 0 & b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z \\ x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} .$$

Soit $a \neq 1$ et la matrice devient

$$\begin{pmatrix} 1 & a & 1 \\ 0 & 1 & \frac{b-1}{1-a} \\ 0 & 0 & b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z \\ x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -\frac{1}{1-a} \\ 1 \end{pmatrix} .$$

Alors si $b = 0$ la matrice est échelonnée et si, $b \neq 0$, elle devient

$$\begin{pmatrix} 1 & a & 1 \\ 0 & 1 & \frac{b-1}{1-a} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z \\ x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -\frac{1}{1-a} \\ \frac{1}{b} \end{pmatrix} .$$

Terminons alors la discussion en donnant les solutions lorsqu'elles existent. En procédant du général au particulier, on voit que :

Si $a \neq 1$ et $b \neq 0$, on a montré que le système initial était équivalent au système suivant :

$$\begin{pmatrix} 1 & a & 1 \\ 0 & 1 & \frac{b-1}{1-a} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z \\ x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -\frac{1}{1-a} \\ \frac{1}{b} \end{pmatrix} ;$$

soit encore

$$\begin{cases} z + ax + y = 4 \\ x + \frac{b-1}{1-a}y = -\frac{1}{1-a} \\ y = \frac{1}{b} \end{cases} .$$

cela signifie que l'on a une solution unique. Calculons-là.

$$\begin{cases} z + ax + y = 4 \\ x + \frac{b-1}{1-a}y = -\frac{1}{1-a} \\ y = \frac{1}{b} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{1}{b} \\ x = -\frac{1}{1-a} - \frac{b-1}{1-a} \frac{1}{b} \\ z = 4 - ax - y \end{cases}$$

soit encore

$$\begin{cases} z + ax + y = 4 \\ x + \frac{b-1}{1-a}y = -\frac{1}{1-a} \\ y = \frac{1}{b} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{1}{b} \\ x = \frac{2b-1}{b(a-1)} \\ z = 4 - \frac{a(2b-1)}{b(a-1)} - \frac{1}{b} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{1}{b} \\ x = \frac{2b-1}{b(a-1)} \\ z = 4 - \frac{2ab-2a+1}{b(a-1)} \end{cases} .$$

La solution est donc, dans ce cas, unique et égale à

$$\left(\frac{2b-1}{b(a-1)}, \frac{1}{b}, 4 - \frac{2ab-2a+1}{b(a-1)} \right) = \left(\frac{2b-1}{b(a-1)}, \frac{1}{b}, \frac{2ab-4b+2a-1}{b(a-1)} \right) .$$

Si $a \neq 1$ et $b = 0$, on a montré que le système initial était équivalent au système suivant :

$$\begin{pmatrix} 1 & a & 1 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{1-a} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z \\ x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -\frac{1}{1-a} \\ 1 \end{pmatrix} .$$

La dernière équation s'écrit donc $0 = 1$. Le système est donc impossible et n'admet aucune solution.

Si $a = 1$ alors le système est équivalent à

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & b-1 \\ 0 & 0 & b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z \\ x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} .$$

Comme les coefficients b et $b - 1$ ne peuvent être nuls en même temps, on sait que le système sera équivalent à un système où la matrice échelonnée s'écrit

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Bref le système est de rang 2. Mais continuons l'échelonnement en retranchant entre elles les deux dernières lignes (par exemple la troisième à la deuxième) :

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z \\ x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

soit encore

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z \\ x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 1 - 2b \end{pmatrix}.$$

On voit alors que

soit $1 - 2b \neq 0$ et le système est impossible ;

soit $1 - 2b = 0$ ($b = \frac{1}{2}$) et le système devient

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z \\ x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} z + x + y = 4 \\ y = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 2 \\ x = 2 - z \end{cases}$$

c'est à dire que le système initial admet, dans ce cas, une infinité de solutions à un paramètre.

En résumé, voici le résultat :

$a \neq 1$ et $b \neq 0$	$\left(\frac{2b-1}{b(a-1)}, \frac{1}{b}, \frac{2ab-4b+2a-1}{b(a-1)} \right)$
$a \neq 1$ et $b = 0$	Aucune solution
$a = 1$ et $b \neq \frac{1}{2}$	Aucune solution
$a = 1$ et $b = \frac{1}{2}$	$\forall z \in \mathbb{R} (2 - z, 2, z)$

On peut également présenter la discussion sous la forme

$a \neq 1$ et $b \neq 0$	$\left(\frac{2b-1}{b(a-1)}, \frac{1}{b}, \frac{2ab-4b+2a-1}{b(a-1)} \right)$
$b = 0$ ou $(a = 1 \text{ et } b \neq \frac{1}{2})$	Aucune solution
$a = 1$ et $b = \frac{1}{2}$	$\forall z \in \mathbb{R} (2 - z, 2, z)$