

# ALGÈBRE LINÉAIRE.

## Matrices. Calcul matriciel. Matrice d'une application linéaire.

### Exercice 3:

On considère la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & a \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

où  $a$  est un paramètre réel.

- a) Calculer  $A^4$ .
- b) Montrer que  $A$  est inversible si et seulement si  $a \neq 0$ .
- c) On suppose  $a \neq 0$ . Calculer  $A^{-1}$ , puis  $A^n$  pour tout entier  $n \in \mathbb{Z}$ .

**Indications.** On sait que

$$A^4 = A^3 * A = A^2 * A^2 = A * A^3$$

puisque la multiplication des matrices est associative. Or

$$A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & a \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & a \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

d'où

$$A^4 = A^2 * A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a \end{pmatrix} = a \text{Id}_4 .$$

On remarque enfin que

$$A^3 = A^2 * A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & a \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

donc  $A^3$  n'est pas nulle.

Si  $a = 0$ , on voit que  $A * A^3 = A^4 = 0$ . Donc  $A$  est une matrice diviseur de 0. Elle ne peut être inversible. Si  $a \neq 0$ , on voit que

$$A * \left( \frac{1}{a} A^3 \right) = \left( \frac{1}{a} A^3 \right) * A = \text{Id}_4 .$$

Bref  $A$  est inversible et son inverse est

$$A^{-1} = \frac{1}{a} A^3 .$$

Donc

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{1}{a} & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} .$$

On peut retrouver ce résultat en remarquant que  $A$  est la matrice de passage de la base canonique à la base

$$f_1 = e_2 ; f_2 = e_3 ; f_3 = e_4 \text{ et } f_4 = ae_1$$

soit

$$e_1 = \frac{1}{a} f_4 ; e_2 = f_1 ; e_3 = f_2 \text{ et } e_4 = f_3 .$$

Si l'on pose  $n = 4m + p$  où  $p = 0, 1, 2$  ou  $3$  et  $m$  est un entier relatif (on considère  $n$  modulo 4), on a

$$A^n = A^{4m+p} = (A^4)^m A^p = a^m A^p$$

puisque  $A^4 = a \text{Id}_4$ . Bref

$$A^{4m} = a^m \text{Id}_4 ; A^{4m+1} = a^m \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & a \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & a^{m+1} \\ a^m & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a^m & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a^m & 0 \end{pmatrix}$$

et

$$A^{4m+2} = a^m \begin{pmatrix} 0 & 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & a^{m+1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a^{m+1} \\ a^m & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a^m & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

et enfin

$$A^{4m+3} = a^m \begin{pmatrix} 0 & a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a^{m+1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a^{m+1} \\ a^m & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} .$$

### Exercice 5:

Déterminer toutes les matrices qui commutent avec la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} .$$

**Indications.** Commençons par chercher les matrices  $B$  telles que

$$A * B = B * A .$$

On posera

$$B = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} .$$

Alors on cherche  $B$  telle que

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

soit

$$\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ 3a + d + 2g & 3b + e + 2h & 3c + f + 2i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a + 3c & b + c & 2c \\ d + 3f & e + f & 2f \\ g + 3i & h + i & 2i \end{pmatrix}$$

d'où le système

$$\begin{cases} a = a + 3c \\ b = b + c \\ c = 2c \\ d = d + 3f \\ e = e + f \\ f = 2f \\ 3a + d + 2g = g + 3i \\ 3b + e + 2h = h + i \\ 3c + f + 2i = 2i \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c = 0 \\ f = 0 \\ 3a + d + g = 3i \\ 3b + e + h = i \end{cases}$$

Il s'agit donc de matrices de la forme :

$$B = \begin{pmatrix} a & b & 0 \\ d & e & 0 \\ 3i - 3a - d & i - 3b - e & i \end{pmatrix}.$$

On vérifie que

$$BA = \begin{pmatrix} a & b & 0 \\ d & e & 0 \\ 3i - 3a - d + 3i & i - 3b - e + i & 2i \end{pmatrix}$$

$$\text{et } AB = \begin{pmatrix} a & b & 0 \\ d & e & 0 \\ 3a + d + 6i - 6a - 2d & 3b + e + 2i - 6b - 2e & 2i \end{pmatrix}$$

Notons que l'on peut raisonner "par bloc" :

$$A = \left( \begin{array}{c|c} \text{Id} & \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ \hline (3 \ 2) & 2 \end{array} \right).$$

Or on peut poser

$$B = \left( \begin{array}{c|c} D & C \\ \hline L & i \end{array} \right).$$

Ici  $D$  est une matrice  $2 \times 2$ ,  $C$  une matrice colonne à 2 lignes et  $L$  une matriceligne à 2 colonnes. Alors

$$AB = \left( \begin{array}{c|c} \text{Id} & \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ \hline (3 \ 2) & 2 \end{array} \right) \left( \begin{array}{c|c} D & C \\ \hline L & i \end{array} \right) = \left( \begin{array}{c|c} D + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} L & C + i \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ \hline (3 \ 2) D + 2L & (3 \ 2) C + 2i \end{array} \right)$$

soit

$$AB = \left( \begin{array}{c|c} D & C \\ \hline (3 \ 2) D + 2L & (3 \ 2) C + 2i \end{array} \right) .$$

$$BA = \left( \begin{array}{c|c} D & C \\ \hline L & i \end{array} \right) \left( \begin{array}{c|c} \text{Id} & \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ \hline (3 \ 2) & 2 \end{array} \right) = \left( \begin{array}{c|c} D + C \begin{pmatrix} 3 & 2 \end{pmatrix} & D \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} + 2C \\ \hline L + i \begin{pmatrix} 3 & 2 \end{pmatrix} & (3 \ 2) \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} + 2i \end{array} \right)$$

soit

$$BA = \left( \begin{array}{c|c} D + C \begin{pmatrix} 3 & 2 \end{pmatrix} & 2C \\ \hline L + i \begin{pmatrix} 3 & 2 \end{pmatrix} & 2i \end{array} \right) .$$

On voit donc que la matrice (colonne)  $C$  doit être nulle et que la matrice (ligne)  $L$  doit vérifier

$$(3 \ 2) D + 2L = L + i (3 \ 2)$$

soit

$$L = i (3 \ 2) - (3 \ 2) D .$$