

POLYNÔMES.

Feuille n°2

Polynômes et algèbre linéaire (suite).

Exercice 1:

- Montrer que $(1, X - 1, X^2 - X, (X - 1)^3)$ est une base de $E = \mathbf{R}_3[X]$.
- Soit F le sous-espace de E engendré par $X^2 - X$ et $(X - 1)^3$. Montrer que

$$F = \{ P \in E : P(1) = 0 \quad \text{et} \quad P''(1) - 2P'(1) = 0 \}.$$

Exercice 2:

Soit u l'endomorphisme de $\mathbf{R}_4[X]$ défini par $u(P) = P + (1 - X)P'$. Déterminer des bases de l'image et du noyau de u et montrer que ce sont des sous-espaces supplémentaires dans $\mathbf{R}_4[X]$.

Exercice 3:

On pose $E_n = \mathbf{R}_n[X]$. Déterminer, dans la base des monômes de degré au plus n , la matrice des applications linéaires suivantes :

- $P \mapsto P(1 + X) - P(X)$
- $P \mapsto P'$
- $P \mapsto Q$ où Q est la primitive de P qui s'annule en 0 .
- $P \mapsto \frac{P(X)+P(-X)}{2}$
- $P \mapsto \frac{P(X)-P(-X)}{2}$

Exercice 4:

Soit $E = \mathbf{R}^4[X]$ l'espace vectoriel des polynômes de degré au plus 3 . Ces polynômes P s'écrivent donc $P = a_0 + a_1X + a_2X^2 + a_3X^3$. Pour tout P , on définit l'application h de E dans E donnée par

$$h : P \mapsto Q \quad Q(X) = P(1 + X) - P(X) .$$

- Montre que h est un endomorphisme de E .
- On pose $V_0 = X^3$, $V_1 = h(V_0)$, $V_2 = h(V_1)$ et $V_3 = h(V_2)$. Montrer que $\{V_0, V_1, V_2, V_3\}$ forme une base de E .
- Trouver la matrice de h dans la base $\{V_0, V_1, V_2, V_3\}$.
- Déterminer le noyau et l'image de h .
- Montrer qu'il existe un entier n tel que $h^n = h \circ \dots \circ h = 0$. Cela suffit-il pour affirmer que le noyau de h ne peut être réduit à $\{0\}$?

Notion de racine. Polynômes et fonctions polynomiales.**Exercice 1:**

On a vu dans un exercice de la feuille précédente que si

$$P_k = \frac{1}{k!}(1+X)(2+X)\dots(k+X) \text{ (pour } k = 1, 2, \dots, n),$$

l'ensemble $\{P_0, \dots, P_n\}$ forme une base de $\mathbb{R}^n[X]$.

— Montrer que

$$\forall k \geq 0 \forall a \in \mathbb{Z} \quad P_{k+1}(a+1) = P_k(a+1) + P_{k+1}(a).$$

— En déduire que $\forall k \geq 0 \forall a \in \mathbb{Z} \quad P_k(a) \in \mathbb{Z}$.

— Déterminer tous les polynômes P de $\mathbb{R}_n[X]$ tels que $\forall a \in \mathbb{Z} \quad P(a) \in \mathbb{Z}$.

Exercice 2:

Factoriser le polynôme

$$X^6 + 4X^5 + 2X^4 - 8X^3 - 7X^2 + 4X + 4.$$

On pourra remarquer que ce polynôme est divisible par des puissances de $X - 1$ et de $X + 1$.

Exercice 3:

On considère le polynôme $P = X^3 + X^2 - X + 1$. On note α_1, α_2 et α_3 ses trois racines réelles ou complexes. Calculer $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3$, $\alpha_1\alpha_2 + \alpha_2\alpha_3 + \alpha_3\alpha_1$ et $\alpha_1\alpha_2\alpha_3$. En calculant l'expression $(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3)^2$ de deux façons, en déduire

$$\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2.$$

Exercice 4:

Déterminer les paramètres a et b dans \mathbb{Z} pour que le polynôme $P = aX^{n+1} + bX^n + 1$ admette 1 comme racine double.

Exercice 5:

On considère le polynôme $A = X^4 - X^3 + 2X^2 - 4X - 8$.

a) Calculer $A(2i)$ et $A(-2i)$.

b) En déduire un polynôme réel de degré 2 divisant A . Quel est alors la décomposition correspondante de A en facteurs irréductibles sur \mathbb{R} ?

Exercice 6:

Dans $\mathbb{C}[X]$, on considère le polynôme $P = (X+1)^6 - (X-1)^6$.

— Quel est le degré de P ?

— Rechercher les solutions complexes de l'équation $P(z) = 0$ (On pourra s'intéresser à $Z = \frac{z+1}{z-1}$).

— Décomposer P en facteurs irréductibles dans $\mathbb{C}[X]$.

Exercice 7:

On considère le polynôme $P = X^3 + 3X + 1$.

— Montrer que P n'admet pas de racine dans \mathbb{Q} .

- En étudiant la fonction $x \mapsto P(x)$ sur \mathbf{R} , établir que P a une unique racine réelle $\alpha \in]-1, 0[$.
- Montrer que P est irréductible sur \mathbf{Q} .
- A l'aide de α , écrire la décomposition de P en facteurs irréductibles dans $\mathbf{R}[X]$.

Exercice 8:

(Suite de l'exercice précédent) On se propose de trouver les racines de P dans \mathbf{C} .

- Montrer que l'application $\varphi : \mathbf{C}^* \rightarrow \mathbf{C}$ définie par $\varphi(z) = z - \frac{1}{z}$ est surjective ; est-elle injective ?
- A tout nombre complexe x , on associe un couple (u, v) tel que

$$\varphi(u) = x \quad \text{et} \quad x = u + v.$$

Montrer que x est une racine de P si et seulement si $u^3 + v^3 = -1$.

- S'il en est ainsi, établir que les nombres $U = u^3$ et $V = v^3$ sont racines de l'équation du second degré $z^2 + z - 1 = 0$ et les calculer.
- Donner la valeur de α , puis celles des racines *non réelles* de P .

Exercice 9:

Soit $P = a_0X^n + a_1X^{n-1} + \dots + a_{n-1}X + a_n$ un polynôme à coefficients dans \mathbf{Z} . Soit un rationnel $x = p/q$, où les entiers p, q sont premiers entre eux. Montrer que, si x est une racine de P , p est un diviseur de a_n et q un diviseur de a_0 .

Exercice 10:

A l'aide de l'exercice précédent :

- déterminer les racines rationnelles de l'équation

$$x^4 - 4x^3 - 8x^2 + 13x + 10 = 0;$$

- montrer que l'équation $x^3 - x - 1 = 0$ n'a pas de racine rationnelle ;
- factoriser sur \mathbf{R} le polynôme $3X^3 + 8X^2 + 12X - 5$.

Exercice 11:

On rappelle que j désigne le nombre complexe $e^{2i\pi/3}$. On considère le polynôme $P_n = (X + 1)^n - X^n - 1$. Montrer que si j est une racine de P_n , il en est de même pour \bar{j} ; en déduire que P_n est divisible par $X^2 + X + 1$ si et seulement si $n \equiv 1 \pmod{6}$ ou $n \equiv 5 \pmod{6}$.

Exercice 12:

Soit P un polynôme à coefficients entiers de degré au plus n . On suppose que $P(c) = 0$ où c est un entier. Montrer que

- Montrer que c divise le coefficient constant a_0 de P .
- Montrer que $c - 1$ divise la somme des coefficients de P .
- Montrer que $c + 1$ divise $a_0 - a_1 + a_2 - \dots + (-1)^n a_n$ (où $P = a_0 + a_1X + \dots + a_nX^n$). En déduire les racines entières de $X^4 + X^3 - X^2 + 40X - 100$.

Irréductibilité et Bezout.**Exercice 1:**

Montrer que les polynômes $P = X^7 - X - 1$ et $Q = X^5 + 1$ sont premiers entre eux.
Trouver deux polynômes A et B tels que

$$AP + BQ = 1 .$$

Exercice 2:

- Montrer que $X^5 - X^3 + X - 2$ et $X^2 - 1$ sont premiers entre eux.
- Déterminer *un* couple (U, V) de polynômes tels que

$$(X^5 - X^3 + X - 2)U + (X^2 - 1)V = 1 .$$

Exercice 3:

Dans $\mathbf{R}[X]$, on considère les polynômes

$$P = X^4 + X^3 + 2X^2 + X + 1 \quad , \quad Q = X^5 - 2X^4 + 3X^3 - 6X^2 + 2X - 4 .$$

- Calculer $D = \text{P.G.C.D.} \{Q, P\}$.
- Déterminer deux polynômes U et V tels que $D = PU + QV$.
- Déterminer les deux polynômes A et B tels que $P = AD$ et $Q = BD$.
- Décomposer P et Q en facteurs irréductibles dans $\mathbf{R}[X]$ (On observera que le polynôme B a une racine évidente).

Exercice 4:

- Montrer que, dans $\mathbf{R}[X]$, les polynômes $(X - 1)^2$ et $(X - 2)^3$ sont premiers entre eux.
- Déterminer les polynômes U et V de degrés minimaux tels que

$$(X - 1)^2U + (X - 2)^3V = 1 .$$

- Déterminer la forme générale des polynômes R, S tels que

$$(X - 1)^2R + (X - 2)^3S = X .$$

- Déterminer le polynôme P de degré minimum tel que son reste dans la division par $(X - 1)^2$ soit $2X$ et celui dans la division par $(X - 2)^3$ soit $3X$.

Exercice 5:

Calculer le PGCD des polynômes $X^{20} - 1$ et $X^{12} - 1$. Généralisation ?

Exercice 6:

Soit $n \in \mathbf{N}^*$.

- Montrer que les polynômes $X^n - 1$ et $X^n + 1$ sont premiers entre eux.
- Soit $P \in \mathbf{R}[X]$. Comparer le P.G.C.D. $(P, X^{2n} - 1)$ avec

$$\text{P.G.C.D.}(P, X^n - 1) \quad \text{et} \quad \text{P.G.C.D.}(P, X^n + 1) .$$

Exercice 7:

Soit $n \in \mathbf{N}^*$.

- Montrer qu'il existe un *unique* couple (U, V) de polynômes de degré inférieur à n tels que

$$X^n U(X) + (1 - X)^n V(X) = 1.$$

- Prouver que $V(X) = U(1 - X)$.
- Montrer l'existence d'un réel λ tel que

$$nU(X) + XU'(X) = \lambda(1 - X)^{n-1};$$

- Calculer $U(X)$.