

ALGÈBRE LINÉAIRE.

Espaces vectoriels. Feuille n°1.

1. Généralités. SEV. Systèmes de vecteurs.

Exercice 1:

On considère l'espace vectoriel réel \mathbb{R}^3 . Soit F la partie de \mathbb{R}^3 formée des vecteurs (x, y, z) qui vérifient l'identité $2x - y - 2z = 0$. Montrer qu'il s'agit d'un sous-espace vectoriel.

Exercice 2:

Dans l'espace vectoriel \mathbb{R}^2 les sous-ensembles suivants sont-ils des sous-espaces vectoriels :

$$E_1 = \{ (x, y) : 2x - y = 0 \} \quad , \quad E_2 = \{ (x, y) : 2x - y = 1 \} \\ E_3 = \{ (x, y) : x^2 - y^2 = 0 \} \quad , \quad E_4 = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} ?$$

Exercice 3:

On considère l'ensemble $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ des applications de \mathbb{R} dans \mathbb{R} . C'est un espace vectoriel réel. Les sous-ensembles suivants sont-ils des sous-espaces vectoriels ?

$$E_1 = \{ f : f(0) = 1 \} , E_2 = \{ f : f(1) = 0 \} , E_3 = \{ f : f(1) = 2f(0) \} , \\ E_4 = \{ f : f(1) = f(0) + 2 \} \quad , \quad E_5 = \{ f : (\forall x \in \mathbb{R}) f(x) \leq 0 \}$$

et enfin l'ensemble E_8 des polynômes de degré 3. Considérons le sous-espace vectoriel des applications de \mathbb{R} dans \mathbb{R} dérivables. Les sous-ensembles

$$E_6 = \{ f : f' + f = 0 \} \quad , \quad E_7 = \{ f : f' + f = 1 \}$$

sont-ils des sous-espaces vectoriels ?

Exercice 4:

Soit E un espace vectoriel réel et F un sous-espace vectoriel strict de E (c'est à dire distinct de E). On note C le complémentaire de F dans E .

a) Montrer que

$$\forall x \in F , \forall y \in C ; x + y \in C ;$$

b) En déduire que C n'est pas un sous-espace vectoriel de E et que le sous-espace engendré par C est E tout entier.

c) Soient F et G deux sous-espaces vectoriels de E . On suppose que $F \not\subset G$ et que $G \not\subset F$. Montrer que $F \cup G$ n'est pas un sous-espace vectoriel de E .

Exercice 5:

Soient F, G, H trois sous-espaces vectoriels d'un même espace vectoriel E , tels que :
 (i) $F + H = G + H$; (ii) $F \cap H = G \cap H$; (iii) $F \subset G$. Montrer que $F = G$. Le résultat subsiste-t-il si l'on supprime une des hypothèses ?

Exercice 6:

On considère l'ensemble des suites numériques réelles qui vérifient

$$\forall n \geq 0 \quad u_{n+2} = u_{n+1} + u_n .$$

Montrer qu'il s'agit d'un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel des suites numériques réelles.

Exercice 7:

Soit a, b deux nombres réels tels que $a^2 + 4b = 0$. Soit S l'ensemble des suites $(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de nombres réels telles que

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad w_{n+2} = aw_{n+1} + bw_n .$$

Montrer que les suites $u = (u_n)$ et $v = (v_n)$ définies par

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n = \left(\frac{a}{2}\right)^n \quad \text{et} \quad v_n = n\left(\frac{a}{2}\right)^n$$

appartiennent à S et que toute suite appartenant à S est une combinaison linéaire de u et v .

Exercice 8:

Dans cet exercice, on considère \mathbb{R} comme un espace vectoriel sur \mathbb{Q} (cela signifie que les "scalaires" sont exclusivement des nombres rationnels).

- Montrer que $\sqrt{2}$ n'est pas proportionnel à 1.
- En déduire que le système $\{1, \sqrt{2}\}$ est libre sur \mathbb{Q} .

2. Systèmes libres. Systèmes générateurs.**Exercice 1:**

On considère les vecteurs de \mathbb{R}^3 suivants :

$$a = (2, 1, -3) , \quad b = (3, 2, -5) , \quad c = (1, -1, 1) \text{ et } d = (6, 2, -7) .$$

Montrer que d est une combinaison linéaire des vecteurs a, b, c . Le système $\{a, b, c\}$ est-il générateur dans \mathbb{R}^3 ? Forme-t-il une base de \mathbb{R}^3 ?

Exercice 2:

On considère les vecteurs de \mathbb{R}^4 suivants :

$$a = (1, 2, -1, -2) , \quad b = (2, 3, 0, -1) , \quad c = (1, 2, 1, 3) , \quad d = (1, 3, -1, 0) \text{ et } e = (7, 14, -1, 2) .$$

Montrer que e est une combinaison linéaire des vecteurs a, b, c, d . Le système $\{a, b, c, d\}$ est-il générateur dans \mathbb{R}^4 ? Forme-t-il une base de \mathbb{R}^4 ?

Exercice 3:

Montrer que les vecteurs (a, b) et (c, d) de \mathbb{R}^2 sont liés si et seulement si $ad - bc = 0$.
Montrer qu'ils forment une base de \mathbb{R}^2 si et seulement si $ad - bc \neq 0$.

Exercice 4:

Dans l'espace vectoriel \mathbb{R}^2 , on considère les vecteurs $v = (1, 2)$ et $w = (-2, m)$.

- À quelle condition sur le paramètre m le vecteur w est-il proportionnel au vecteur v ?
- En supposant que w n'est pas proportionnel à v , montrer que tout vecteur de \mathbb{R}^2 est une combinaison linéaire de v et w .

Exercice 5:

Pour chacune des suites de vecteurs suivantes, dans les espaces vectoriels \mathbb{R}^n ou \mathbb{C}^n , on indiquera s'il s'agit d'une suite libre, génératrice, d'une base; si l'on montre que la suite est liée, on donnera une relation linéaire explicite entre les v_j . Le cas échéant, on devra discuter suivant le paramètre m .

- $v_1 = (2, 3, 4)$, $v_2 = (-1, -5, -7)$, $v_3 = (3, 1, 1)$,
- $v_1 = (1, -1, i)$, $v_2 = (-1, i, 1)$, $v_3 = (i, 1, -1)$,
- $v_1 = (1, 2, -1, 0)$, $v_2 = (4, 5, 0, 1)$, $v_3 = (2, 1, 2, 1)$,
- $v_1 = (1, -1, 2, 4)$, $v_2 = (0, 3, -1, 5)$, $v_3 = (-1, 0, 2, 6)$,
- $v_1 = (4, 3, 3, 6)$, $v_2 = (1, 1, -1, -2)$, $v_3 = (4, 2, 10, m)$,
- $v_1 = (1, 2, -1, -2)$, $v_2 = (2, 3, 0, -1)$, $v_3 = (1, 3, -1, 0)$, $v_4 = (1, 2, 1, m)$.

Exercice 6:

Dans l'espace vectoriel \mathbb{R}^3 , on considère les vecteurs $v = (1, -2, -5)$ et $w = (-2, 4, m)$.

- À quelle condition sur le paramètre m le vecteur w est-il proportionnel au vecteur v ?
- On suppose que w n'est pas proportionnel à v et l'on considère l'ensemble P de toutes les combinaisons linéaires de v et w . Montrer qu'on a

$$P = \{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : ax + by + cz = 0 \},$$

où a, b, c sont des nombres réels, non tous les trois nuls, que l'on déterminera.

Exercice 7:

Dans l'espace vectoriel \mathbb{R}^3 , on considère les vecteurs $v_1 = (-2, 4, 1)$, $v_2 = (1, -2, 0)$ et $v_3 = (3, b, -1)$.

- À quelle condition sur le paramètre b le vecteur v_3 est-il une combinaison linéaire de v_1 et v_2 ?
- On suppose cette condition vérifiée. Montrer que v_1 est une combinaison linéaire de v_2 et v_3 et que v_2 est une combinaison linéaire de v_1 et v_3 .
- On suppose que cette condition n'est pas vérifiée. Montrer que tout vecteur de \mathbb{R}^3 est une combinaison linéaire de v_1 , v_2 et v_3 .

Exercice 8:

Soit l'espace vectoriel \mathbb{R}^4 . On considère le sous-espace F engendré par les vecteurs $(1, 2, -1, 0)$, $(4, 8, -4, -3)$, $(0, 1, 3, 4)$ et $(2, 5, 1, 4)$. Extraire de ce système générateur de F un système de vecteurs libres.

Exercice 9:

Décrire le sous-espace vectoriel de \mathbb{R}^4 engendré par les vecteurs

$$a = (1, -1, 1, 0), \quad b = (1, 1, 0, 1), \quad c = (2, 0, 1, 1).$$

Exercice 10:

On considère l'espace vectoriel $\mathbb{R}_2[X]$ et les polynômes

$$P_1(x) = (x-1)^2, \quad P_2(x) = (2x+1)^2 \quad \text{et} \quad P_3(x) = ux + 3,$$

où u est un paramètre réel.

a) À quelle condition sur le paramètre u le vecteur P_3 est-il une combinaison linéaire de P_1 et P_2 ?

b) On suppose cette condition vérifiée. Montrer que P_1 est une combinaison linéaire de P_2 et P_3 et que P_2 est une combinaison linéaire de P_1 et P_3 .

c) On suppose que cette condition n'est pas vérifiée. Montrer que tout vecteur de $\mathbb{R}_2[X]$ est une combinaison linéaire de P_1 , P_2 et P_3 .

Exercice 11:

Dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ des fonctions de \mathbb{R} dans \mathbb{R} , on considère les éléments c, s, u, v, w définis par

$$c(x) = \cos x, \quad s(x) = \sin x, \quad u(x) = \cos 2x, \quad v(x) = 1, \quad w(x) = \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right),$$

quel que soit le réel x .

a) Montrer que s n'est pas proportionnel à c .

b) Montrer que v n'est pas une combinaison linéaire de c et s (Indication : raisonner par l'absurde et donner diverses valeurs à la variable x).

c) Est-ce que u est une combinaison linéaire de c et s ? Même question pour w .

Exercice 12:

Montrer que les fonctions $x \mapsto x^2$, $x \mapsto \cos(x)$ et $x \mapsto \exp(x)$ forment un système indépendant dans $\mathcal{C}(\mathbb{R}; \mathbb{R})$.

Exercice 13:

On considère l'ensemble des suites numériques réelles qui vérifient

$$\forall n \geq 0 \quad u_{n+2} = u_{n+1} + u_n.$$

On note u la suite numérique réelle appartenant à ce sous-espace et vérifiant $u_0 = 1$ et $u_1 = 0$. On note de même v la suite numérique réelle vérifiant $v_0 = 0$ et $v_1 = 1$. Montrer que le système $\{u, v\}$ est un système libre et générateur de ce sous-espace vectoriel.

Exercice 14:

Soit E un espace vectoriel réel. On se donne u et v deux vecteurs de E . Montrer qu'ils forment un système libre si et seulement si le système formé par les vecteurs $u + v$ et $u - v$ est libre.

Exercice 15:

Soit E un espace vectoriel réel. Soient u, v et w trois vecteurs de E dont on suppose qu'ils forment un système libre.

- a) Le vecteur $u + v + w$ est-il combinaison linéaire des vecteurs $u + v$ et $v + w$?
- b) Le système formé par les vecteurs $u + v + w$, $u + v$ et $v + w$ est-il libre ?

Exercice 16:

Dans cet exercice, on considère \mathbb{R} comme un espace vectoriel sur \mathbf{Q} (cela signifie que les "scalaires" sont exclusivement des nombres rationnels).

- a) Montrer que $\sqrt{2}$ n'est pas proportionnel à 1.
- b) Soit x, y deux rationnels tels que $x + y\sqrt{2} \neq 0$. Montrer que le nombre réel

$$\frac{1}{x + y\sqrt{2}}$$

est une combinaison linéaire de 1 et $\sqrt{2}$.

- c) Soit \mathbf{K} l'ensemble de toutes les combinaisons linéaires de 1 et $\sqrt{2}$. Montrer que \mathbf{K} est un corps pour les opérations d'addition et de multiplication usuelles.

3. Généralités. Exemples d'espaces vectoriels**Exercice 17:**

On considère l'ensemble des fonctions continues sur \mathbb{R} à valeur dans \mathbb{R} qui valent 0 en $x = 1$. On le note $\mathcal{C}(\mathbb{R}; \mathbb{R})$. S'agit-il d'un espace vectoriel sur \mathbb{R} ?

Même question avec l'ensemble des fonctions continues sur \mathbb{R} à valeur dans \mathbb{R} qui valent 2016 en $x = 1$.

Exercice 18:

On considère l'ensemble des suites numériques réelles (applications de \mathbb{N} dans \mathbb{R}). On le note $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. On note $u ; n \mapsto u(n) = u_n$ une telle application. S'agit-il d'un espace vectoriel sur \mathbb{R} ?

Même question avec l'ensemble des suites numériques réelles qui vérifient que $u_0 = 0$ et avec l'ensemble des suites numériques réelles qui vérifient que $u_{10} = 2016$.

Même question avec l'ensemble des suites numériques réelles qui vérifient que

$$\forall n \geq 0 ; u_{n+1} = \alpha u_n + 1$$

(où $\alpha \in \mathbb{R}$).

Exercice 19:

Soit n un entier naturel. Soient (a_0, \dots, a_n) un ensemble de $n + 1$ réels. On appelle fonction polynomiale réelle la fonction

$$x \mapsto a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n = \sum_{i=0}^n a_i x^i.$$

Montrer que l'ensemble des fonctions polynomiales réelles est un espace vectoriel sur \mathbb{R} . En est-il de même pour l'ensemble des fonctions polynomiales qui valent 1 en $x = 0$?

Exercice 20:

Notons \mathcal{F}_2 l'ensemble des fonctions vectorielles (à valeurs dans \mathbb{R}^2) de la variable réelle t . On notera $F : t \mapsto F(t) = (F_1(t), F_2(t))$ une telle fonction. S'agit-il d'un espace vectoriel sur \mathbb{R} ? Soit n un entier naturel non nul. Que peut-on dire de l'ensemble \mathcal{F}_n des fonctions vectorielles (à valeurs dans \mathbb{R}^n) de la variable réelle t ?

Exercice 21:

Soit a une fonction continue de \mathbb{R} dans \mathbb{R} . On considère l'ensemble \mathcal{E}_a des fonctions dérivables sur \mathbb{R} qui vérifient $f'(x) = a(x)f(x)$. Montrer que \mathcal{E}_a est un espace vectoriel réel.

Soit b une seconde fonction continue de \mathbb{R} dans \mathbb{R} dont on suppose qu'elle n'est pas identiquement nulle. On considère l'ensemble $\mathcal{E}_{a,b}$ des fonctions dérivables sur \mathbb{R} qui vérifient $f'(x) = a(x)f(x) + b(x)$. Est-ce un espace vectoriel?