

ANALYSE.

1. Limites et continuité.

Exercice 1:

Soit n un entier naturel non nul. On définit f_n comme la fonction linéaire par morceaux telle que

$$f_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq \frac{1}{n+1} \\ 1 & \text{si } x = \frac{\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n}}{2} \\ 0 & \text{si } x \geq \frac{1}{n} \end{cases} .$$

Donner une expression de $f_n(x)$ pour toutes les valeurs de x . Où cette fonction est-elle continue ?

On définit alors f par $f(x) = 0$ si $x \notin]0, 1]$ et $f(x) = f_n(x)$ si $x \in [\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}]$. Est-elle continue en 0 ?

Exercice 2:

Soit f la fonction qui vaut 1 sur tous les nombres rationnels et 0 sur tous les nombres irrationnels. Est-elle continue en un point de \mathbb{R} ?

Exercice 3:

On souhaite déterminer toutes les fonctions continues de \mathbb{R} dans \mathbb{R} qui vérifient

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 \quad f(x+y) = f(x) + f(y) .$$

- a) Montrer que $\forall n \in \mathbb{Z} \quad f(n) = nf(1)$;
- b) Montrer que $\forall r \in \mathbb{Q} \quad f(r) = rf(1)$;
- c) En déduire que $\forall x \in \mathbb{R} \quad f(x) = xf(1)$.
- d) Montrer que cette conclusion demeure si l'on suppose seulement que f est continue en 0 .

2. Dérivabilité. Dérivabilité d'ordre supérieur.

Exercice 1:

Soit f la fonction qui vaut 1 sur tous les nombres rationnels et 0 sur tous les nombres irrationnels. On introduit g telle que $g(x) = x^3 f(x)$. Montrer que g est continue et dérivable en 0. Montrer que $g(x)/x^2$ tend vers 0 si x tend vers 0. La fonction g est-elle deux fois dérivable en 0 ?

Exercice 2:

Soient $0 < a < b$ deux nombres réels strictement positifs. Soit f une fonction continue sur $[a, b]$ à valeurs dans \mathbb{R} . On suppose que f est dérivable sur $]a, b[$ et vérifie $f(a) = f(b) = 0$. Montrer qu'il existe un réel c dans l'intervalle $]a, b[$ tel que la tangente au graphe de f en c passe par l'origine (on pourra considérer la fonction $x \mapsto \frac{f(x)}{x}$).

Exercice 3:

Montrer que la dérivée

- d'une fonction paire est une fonction impaire ;
- d'une fonction impaire est une fonction paire ;
- d'une fonction périodique de période T est périodique de période T .

Exercice 4:

a) Soit f une fonction définie et continue sur l'intervalle $[a, b]$. On suppose que f est dérivable sur $]a, b[$. Montrer, à l'aide du théorème des accroissements finis, que, si la dérivée f' admet une limite r lorsque x tend vers a à droite, la fonction f admet une dérivée à droite en a égale à r .

b) Montrer que la fonction $x \mapsto \sqrt{x} \sin(x)$ admet une dérivée à droite en 0.

Exercice 5:

On considère la fonction

$$\frac{x}{x+1} - \ln(1+x).$$

Montrer qu'elle est monotone sur $[0, +\infty[$ et en déduire l'inégalité

$$\forall x > 0 \quad \frac{x}{x+1} < \ln(1+x).$$

Exercice 6:

Vérifier que, pour tout $x > 0$, on a

$$x - \frac{x^2}{2} < \ln(1+x) < x.$$

Exercice 7:

a) Soit f une fonction dérivable de $]a, b[$ dans \mathbb{R} . On suppose que

$$\forall x \in]a, b[\quad \alpha < f'(x) < \beta.$$

Montrer que

$$x < y \Rightarrow \alpha(y-x) < f(y) - f(x) < \beta(y-x).$$

b) Montrer que

(1)

$$\forall x > 0 ; 1 < \sqrt{1+x} < 1 + \frac{x}{2} ;$$

(2)

$$\forall x > 0 ; 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} < \sqrt{1+x} < 1 + \frac{x}{2}.$$

Exercice 8:

Soit x un réel appartenant à l'intervalle $[-\pi, \pi]$.

- a) Montrer qu'il existe un unique θ appartenant à $]0, 1[$ tel que

$$\sin(x) = x - \frac{x^3}{6} \cos(\theta x) .$$

b) Trouver la limite de θ lorsque x tend vers 0 (on pourra utiliser la formule de Taylor-Young à l'ordre 5 pour la fonction $\sin(x)$).

Exercice 9:

- a) Vérifier que

$$\forall x > 0 \quad \text{Arctan}(1/x) = \frac{\pi}{2} - \text{Arctan}(x) \text{ et } \forall x \in \mathbb{R} \quad \cos(\text{Arctan}(x)) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} .$$

- b) Pour tout entier n , on pose

$$g_n(x) = (-1)^{n-1} (n-1)! \sin^n(\text{Arctan}(1/x)) \sin(n \text{Arctan}(1/x)) .$$

Montrer que

$$\forall n \geq 1, \forall x > 0, g_n(x) = \text{Arctan}^{(n)}(x) .$$

- c) Comparer $g_n(x)$ et $\text{Arctan}^{(n)}(x)$ lorsque $n \geq 1$ et $x < 0$.

d) Montrer que, pour tout entier $n \geq 1$, la fonction $\text{Arctan}(x)$ admet une dérivée n -ième en 0 que l'on calculera.

e) Écrire le développement de Taylor-Mac Laurin de la fonction $\text{Arctan}(x)$ à l'ordre n au voisinage de 0.

Exercice 10:

Soit la fonction $f_n(x) = (x^2 - 1)^n$. Montrer que sa dérivée n -ième admet n zéros distincts appartenant à l'intervalle $] -1, 1[$.

Exercice 11:

- a) Montrer que la dérivée n -ième de la fonction $f(x) = e^{-x^2}$ est de la forme

$$f^{(n)}(x) = P_n(x) e^{-x^2}$$

où P_n est une fonction polynomiale de degré n . Établir une relation de récurrence entre P_n , P'_n et P_{n+1} .

- b) Montrer par récurrence que, pour tout $n \geq 1$ et tout x réel,

$$P_{n+1}(x) + 2xP_n(x) + \alpha_n P_{n-1}(x) = 0$$

où α_n est un nombre entier que l'on déterminera.

- c) En déduire une relation entre P_n , P'_n et P''_n .

- d) En posant $P_n = a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n$, déterminer explicitement P_n .

3. Recherche de zéro.**Exercice 1:**

Soit f une fonction définie et continue sur $[0, 1]$ à valeur dans $[0, 1]$. Montrer qu'il existe un élément x_0 dans $[0, 1]$ tel que $f(x_0) = x_0^n$ pour tout entier $n \geq 1$.

Exercice 2:

On considère l'équation $x - \cos\left(\frac{x}{n}\right) = 0$ ($n \geq 1$). Déterminer le nombre de solutions de cette équation. On appelle x_n celle de ces solutions qui est (strictement) positive. Quelle est la limite de x_n lorsque n tend vers $+\infty$?

Exercice 3:

On considère la fonction

$$f_a(x) = \operatorname{Argsh}(x) - ax$$

où a est un nombre réel.

- (1) Montrer que l'équation $f_a(x) = 0$ admet une solution unique si $a \geq 1$ ou $a \leq 0$.
- (2) Si $0 < a < 1$, on note x_a l'unique racine strictement positive. Montrer que l'unique racine strictement négative est $-x_a$.
- (3) Montrer que $\lim_{a \rightarrow 0^+} x_a = +\infty$ et $\lim_{a \rightarrow 1^-} x_a = 0$.

Exercice 4:

On considère la fonction

$$f_a(x) = \operatorname{Arcsin}(x) - ax$$

où a est un nombre réel.

- (1) Montrer que l'équation $f_a(x) = 0$ admet une solution unique si $a \leq 1$ ou $a \geq \frac{\pi}{2}$.
- (2) Si $1 < a < \frac{\pi}{2}$, on note x_a l'unique racine strictement positive. Montrer que l'unique racine strictement négative est $-x_a$.
- (3) Montrer que $\lim_{a \rightarrow 1^+} x_a = 0$ et $\lim_{a \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} x_a = 1$.

Exercice 5:

Soit $\alpha \in]0, 1[$ et $x \in]0, \pi[$. En étudiant les variations de la fonction

$$f_\alpha(x) = \frac{\sin(\alpha x)}{\sin(x)}$$

sur l'intervalle $]0, \pi[$, montrer qu'il existe un unique réel $x(\alpha)$ dans cet intervalle tel que

$$f_\alpha(x(\alpha)) = \alpha + \frac{1 - \alpha^2}{2}.$$

Montrer que $x(\alpha) < \frac{\pi}{1+\alpha}$.

Exercice 6:

On se donne n nombres réels a_i tels que

$$a_1 < a_2 < \dots < a_n.$$

Montrer que l'équation

$$\frac{1}{x - a_1} + \frac{1}{x - a_2} + \dots + \frac{1}{x - a_n} = 0$$

admet exactement $n - 1$ racines réelles distinctes (on pourra étudier les variations de cette fonction).

4. Variation et graphe.**Exercice 1:**

a) Étudier les variations de la fonction

$$g(x) = \ln|x+1| - \ln|x-1| - \frac{1}{x}.$$

b) En déduire les variations de f où

$$f(x) = (x^2 - 1) \ln \left| \frac{1+x}{1-x} \right|.$$

c) Étudier le graphe de f au voisinage de $x = 0$.

d) Faire de même au voisinage de $x = 1$.

e) Montrer que f admet une asymptote oblique au voisinage de $\pm\infty$.

f) Dresser le graphe de f .

Exercice 2:

On considère la fonction

$$f(x) = |\operatorname{th}(x)|^{\operatorname{sh}(2x)}.$$

a) Quel est le domaine de définition de f ? Peut-on prolonger la fonction f à \mathbb{R} tout entier par continuité? Si oui, la fonction obtenue est-elle dérivable partout?

b) Calculer la dérivée de f .

c) Étudier la limite de f lorsque x tend vers $+\infty$ et $-\infty$.

d) Étudier les variations de f et en dresser le graphe.

Exercice 3:

On se donne la fonction f de \mathbb{R} dans \mathbb{R} par

$$f(x) = \begin{cases} (\operatorname{ch}(x))^{1/x} & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}.$$

a) Montrer que f est continue en 0. Montrer que f est dérivable en 0 et déterminer $f'(0)$. Préciser la forme du graphe de f au voisinage de 0.

b) Étudier les variations de f (on pourra s'aider de l'étude de la fonction auxiliaire $g(x) = x \operatorname{th}(x) - \ln(\operatorname{ch}(x))$). Préciser les limites en $\pm\infty$ de f .

c) Donner l'allure du graphe de f .

Exercice 4:

On considère la fonction f définie sur \mathbb{R}^{+*} par

$$f(x) = x^2 (\ln(x+1) - \ln(x)).$$

a) Calculer la limite de f en 0^+ .

b) Étudier les variations de f (on pourra s'aider de l'étude rapide de la fonction auxiliaire $g(x) = 2 \ln(x+1) - 2 \ln(x) - \frac{1}{x+1}$).

c) Montrer que le graphe de f admet une asymptote en $+\infty$. préciser la position du graphe de f par rapport son asymptote lorsque x tend vers $+\infty$.