Université Paris Diderot Paris 7
Licence L1 (S2)
2017-2018

Département de Sciences Exactes
Algèbre et analyse élémentaires II
MI2

Examen Terminal

3 mai 2018 à 12h

Durée : 3 heures.

Tous les documents sont interdits, ainsi que les calculatrices et les téléphones portables. Les exercices sont indépendants entre eux. Une attention particulière sera portée à la rédaction.

---

1. **Application du cours.** On considère la fonction $f(x) = x - \cos(x)$. Montrer qu'elle admet au moins un zéro dans l'intervalle $]0, 1[$. En étudiant la dérivée de f , montrer que ce zéro est unique sur $\mathbb{R}$ tout entier.

2. **Exercice 1**.
   — En étudiant les variations de la fonction $\tan(x) - x$, montrer que
   $$\forall x \in]0, \frac{\pi}{2}[\ ,\ \tan(x) > x > 0\ ;$$
   $$\text{et } \forall x \in]-\frac{\pi}{2}, 0[\ ,\ \tan(x) < x < 0\ .$$
   — En étudiant de même les variations de la fonction $\tan(x) - x - \frac{x^3}{3}$, montrer que
   $$\forall x \in]0, \frac{\pi}{2}[\ ,\ \tan(x) > x + \frac{x^3}{3} > 0\ ;$$
   $$\text{et } \forall x \in]-\frac{\pi}{2}, 0[\ ,\ \tan(x) < x + \frac{x^3}{3} < 0\ .$$

3. **Exercice 2**.
   — Rappelez de quelle dimension est l'espace vectoriel $E = \mathbb{R}_2[X]$ des polynômes réels de degré au plus 2 .
   — Expliquez, sans calculs, pourquoi le système formé par les quatre polynômes $P_1 = 1 - X + X^2$, $P_2 = X + X^2$, $P_3 = 1 + 2X^2$ et $P_4 = 1 - 2X$ ne peut être libre.
   — Quel est le rang du système $\{P_1, P_2, P_3, P_4\}$? En extraire une base et définir le sous-espace engendré par ces vecteurs par un système d'équations.

4. **Exercice 3**.
   On considère l'application linéaire φ de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$ donnée par la matrice

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} .$$

   (a) Déterminer le noyau de φ . On en donnera une base.
   (b) Déterminer l'image de φ . On en donnera une base et une équation.
   (c) L'application φ est-elle inversible ?
   (d) Montrer que le système

$$\begin{aligned} f_1 &= e_1 + e_3 \\ f_2 &= e_1 + e_2 + e_3 \\ f_3 &= -e_1 + e_3 \end{aligned}$$

   forme une base de $\mathbb{R}^3$ (où e_1 , e_2 et e_3 représentent les vecteurs de la base canonique).
   (e) Calculer la matrice B de φ dans la base $\{f_1, f_2, f_3\}$.
   (f) Calculer, pour tout $n \in \mathbb{N}$, les vecteurs $\varphi^n(f_1)$, $\varphi^n(f_2)$ et $\varphi^n(f_3)$.

Barême indicatif : Application du cours (3 points). Exercice 1 (4=2+2 points). Exercice 2 (4=1+1+2points). Exercice 3). Exercice 4 (9=2+2+1+1+2+1points).