Université Paris Diderot Paris 7 | **Département de Sciences Exactes**
Licence L1 (S2) | Algèbre et analyse élémentaires II
2017-2018 | MI2

(Un) Corrigé de l'examen Terminal

3 mai 2018 à 12h

Tous les documents sont interdits, ainsi que les calculatrices et les téléphones portables. Les exercices sont indépendants entre eux. Une attention particulière sera portée à la rédaction.

1. **Application du cours.** On considère la fonction $f(x) = x - \cos(x)$. Montrer qu'elle admet au moins un zéro dans l'intervalle $]0,1[$. En étudiant la dérivée de f , montrer que ce zéro est unique sur $\mathbb{R}$ tout entier.

   Indications. La fonction $f(x) = x - \cos(x)$ est définie sur $\mathbb{R}$ tout entier et y est continue comme différence de fonctions continues. Or
   $f(0) = -\cos(0) = -1 < 0$ et $f(1) = 1 - \cos(1) > 0$
   (puisque $0 < 1 < \frac{\pi}{2} \Rightarrow 1 > \cos(1) > 0$). Donc la fonction continue f change de signe entre 0 et 1 . D'après le théorème des valeurs intermédiaires, cette fonction s'annule au moins une fois entre 0 et 1 .
   Mais cette fonction est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f'(x) = 1 + \sin(x) \geq 0$. On remarquera qu'elle ne s'annule qu'en $-\frac{\pi}{2} + 2k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$). On en déduit que f est une fonction strictement croissante sur chaque intervalle

   $$]-\frac{\pi}{2} + 2k\pi, -\frac{\pi}{2} + 2(k+1)\pi[$$

   donc sur $\mathbb{R}$. D'où le tableau de variation

x	$-\infty$	$\dots$	$-\frac{\pi}{2}$	0	1	$\frac{3\pi}{2}$	$\dots$	$+\infty$
$f'(x)$			0	$+$	$+$	0		
$f(x)$	$-\infty$	$\dots$	$-\frac{\pi}{2}$	-1	$1-\cos(1)$	$\frac{3\pi}{2}$	$\dots$	$+\infty$

   Il démontre que le zéro mis en évidence entre 0 et 1 est unique.

2. **Exercice 1**.
   — En étudiant les variations de la fonction $\tan(x) - x$, montrer que

   $$\forall x \in]0, \frac{\pi}{2}[\,,\ \tan(x) > x > 0\,;$$

   $$\text{et } \forall x \in]-\frac{\pi}{2}, 0[\,,\ \tan(x) < x < 0\,.$$

— En étudiant de même les variations de la fonction $\tan(x) - x - \frac{x^3}{3}$, montrer que

$$\forall x \in]0, \frac{\pi}{2}[\ ,\ \tan(x) > x + \frac{x^3}{3} > 0\ ;$$

$$\text{et } \forall x \in]-\frac{\pi}{2}, 0[\ ,\ \tan(x) < x + \frac{x^3}{3} < 0\ .$$

Indications. La fonction $\tan(x)$ est définie, continue et indéfiniment dérivable sur $]-\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi[$ ($k \in \mathbb{Z}$). Sur l'intervalle $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$, la fonction $\tan(x) - x$ a pour dérivée

$$1 + \tan^2(x) - 1 = \tan^2(x) \geq 0\ .$$

Elle est donc strictement croissante sur l'intervalle $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$. Soit le tableau de variation

x	$-\infty$	$\dots$	$-\frac{\pi}{2}$		0		$\frac{\pi}{2}$	$\dots$	$+\infty$
$f'(x)$				$+$	0	$+$			
$f(x)$		$\dots$	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$	$\dots$	

D'où le résultat cherché

$$\forall x \in]0, \frac{\pi}{2}[\ ,\ \tan(x) > x > 0\ ;$$

$$\text{et } \forall x \in]-\frac{\pi}{2}, 0[\ ,\ \tan(x) < x < 0\ .$$

Passons à la fonction $\tan(x) - x - \frac{x^3}{3}$. Elle est définie, continue et indéfiniment dérivable sur $]-\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi[$ ($k \in \mathbb{Z}$). Sur l'intervalle $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$, elle a pour dérivée

$$1 + \tan^2(x) - 1 - x^2 = \tan^2(x) - x^2 = (\tan(x) - x)(\tan(x) + x)\ .$$

x	$-\infty$	$\dots$	$-\frac{\pi}{2}$		0		$\frac{\pi}{2}$	$\dots$	$+\infty$
$f'(x)$				$+$	0	$+$			
$f(x)$		$\dots$	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$	$\dots$	

Et le résultat cherché

$$\forall x \in]0, \frac{\pi}{2}[\ ,\ \tan(x) > x + \frac{x^3}{3} > 0\ ;$$

$$\text{et } \forall x \in \left]-\frac{\pi}{2}, 0\right[\,,\ \tan(x) < x + \frac{x^3}{3} < 0 \,.$$

3. **Exercice 2**.
   - Rappelez de quelle dimension est l'espace vectoriel $E = \mathbb{R}_2[X]$ des polynômes réels de degré au plus 2 .
   - Expliquez, sans calculs, pourquoi le système formé par les quatre polynômes $P_1 = 1 - X + X^2$, $P_2 = X + X^2$, $P_3 = 1 + 2X^2$ et $P_4 = 1 - 2X$ ne peut être libre.
   - Quel est le rang du système $\{P_1, P_2, P_3, P_4\}$? En extraire une base et définir le sous-espace engendré par ces vecteurs par un système d'équations.

   Indications.
   - L'espace vectoriel $E = \mathbb{R}_2[X]$ des polynômes réels de degré au plus 2 est l'ensemble des polynômes de la forme $a_0 + a_1X + a_2X^2$ $(a_0, a_1, a_2 \in \mathbb{R})$. C'est un espace vectoriel de dimension 3 engendré par les monômes 1 , X et X^2 .
   - Un système formé par quatre vecteurs (ici des polynômes) dans un espace vectoriel de dimension 3 ne peut être libre puisque la dimension est le cardinal maximal d'un système libre.
   - Cherchons le rang du système $\{P_1, P_2, P_3, P_4\}$. On a

     $$(P_1, P_2, P_3, P_4) = (1\ X\ X^2) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \,.$$

     Il nous suffit donc d'échelonner la matrice ainsi mise en évidence.

     $$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \,.$$

     Le système $\{P_1, P_2, P_3, P_4\}$ est donc de rang 2 . Pour trouver une base de l'espace F engendré par $\{P_1, P_2, P_3, P_4\}$, il suffit donc de prendre deux des polynômes en vérifiant qu'ils ne sont pas proportionnels comme, par exemple, $\{P_1, P_2\}$ ou $\{P_2, P_3\}$ ou encore $\{P_3, P_4\}$. Dans un espace de dimension 3 , un sous-espace de dimension 2 est de co-dimension 1 . Il est donc défini par une seule équation.
     Soit on cherche la condition pour laquelle le polynôme $a_0 + a_1X + a_2X^2$ appartient à F et l'on échelonne la matrice

     $$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & a_0 \\ -1 & 1 & a_1 \\ 1 & 1 & a_2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & a_0 \\ 0 & 1 & a_0 + a_1 \\ 0 & 1 & a_2 - a_0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & a_0 \\ 0 & 1 & a_0 + a_1 \\ 0 & 0 & a_2 - a_1 - 2a_0 \end{array}\right) \,.$$

     L'équation cherchée est donc $a_2 - a_1 - 2a_0 = 0$.

Soit on cherche les coefficients α, β, γ tels que l'équation

$$\alpha a_0 + \beta a_1 + \gamma a_2 = 0$$

est satisfaite par les vecteurs de F (et il suffit de prendre une base de F). Soit le système

$$\begin{cases} \beta + \gamma &= 0 \\ \alpha - 2\beta &= 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \beta &= -\gamma \\ \alpha &= 2\beta \end{cases}$$

soit les équations

$$\gamma(-2a_0 - a_1 + a_2) = 0 \, .$$

4. **Exercice 3**.

On considère l'application linéaire φ de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$ donnée par la matrice

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \, .$$

(a) Déterminer le noyau de φ . On en donnera une base.

(b) Déterminer l'image de φ . On en donnera une base et une équation.

(c) L'application φ est-elle inversible ?

(d) Montrer que le système

$$\begin{aligned} f_1 &= e_1 + e_3 \\ f_2 &= e_1 + e_2 + e_3 \\ f_3 &= -e_1 + e_3 \end{aligned}$$

forme une base de $\mathbb{R}^3$ (où e_1 , e_2 et e_3 représentent les vecteurs de la base canonique).

(e) Calculer la matrice B de φ dans la base $\{f_1, f_2, f_3\}$.

(f) Calculer, pour tout $n \in \mathbb{N}$, les vecteurs $\varphi^n(f_1)$, $\varphi^n(f_2)$ et $\varphi^n(f_3)$.

Indications. Commençons par étudier le rang de la matrice

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \, .$$

On a immédiatement

$$A \sim \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \, .$$

Donc A est de rang 2 .

— D'après la théorème du rang,

$$\mathrm{Dim}(\mathrm{Ker}(\varphi)) + \mathrm{Dim}(\mathrm{Im}(\varphi)) = 3 \, .$$

Donc le noyau est de dimension 1 . Il nous suffit maintenant de résoudre le système

$$\begin{cases} \frac{x}{2} + y - \frac{z}{2} & = & 0 \\ -\frac{x}{2} + y + \frac{z}{2} & = & 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + 2y - z & = & 0 \\ 2y & = & 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x & = & z \\ y & = & 0 \end{cases}$$

Les vecteurs $x(1,0,1)$ sont donc les vecteurs du noyau. Une base est donc donnée par $e_1 + e_3$.

— Le rang de A est la dimension de l'image de φ qui est donc de dimension 2 . Une base possible est formée par deux vecteurs colonnes de la matrice (non proportionnels) soit par exemple $e_1 - e_3$ et $e_1 + e_3$. La co-dimension de l'image est 1 . Donc elle est définie par une équation de la forme $\alpha x + \beta y + \gamma z = 0$. Soit le système

$$\begin{cases} \alpha - \gamma & = & 0 \\ \alpha + \gamma & = & 0 \end{cases} \Leftrightarrow \alpha = \gamma = 0 \, .$$

Bref l'équation de l'image est $y = 0$.
On aurait pu également chercher la condition à laquelle le système

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

admet des solutions. Un simple échelonnement donne

$$\left(\begin{array}{ccc|c} \frac{1}{2} & 1 & -\frac{1}{2} & x \\ 0 & 0 & 0 & y \\ -\frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{2} & z \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} \frac{1}{2} & 1 & -\frac{1}{2} & x \\ -0 & 2 & 0 & z \\ 0 & 0 & 0 & y \end{array}\right)$$

soit la condition $y = 0$.

— Étudions la matrice de passage

$$(f_1, f_2, f_3) = (e_1, e_2, e_3)P = (e_1, e_2, e_3) \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \, .$$

On a

$$P \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \, .$$

Donc P est bien de rang maximal 3 .

— Étudions l'image par φ des vecteurs (f_1, f_2, f_3) . On a

$$\varphi(f_1) = \varphi(e_1 + e_3) = 0\ ,$$

$$\varphi(f_2) = \varphi(e_1 + e_2 + e_3) = \varphi(e_2) = e_1 + e_3 = f_1$$

$$\text{et } \varphi(f_3) = \varphi(-e_1 + e_3) = -\frac{e_1}{2} + \frac{e_3}{2} - \frac{e_1}{2} + \frac{e_3}{2} = -e_1 + e_3 = f_3\ .$$

Finalement, on a, par définition de la matrice d'une application dans une base,

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\ .$$

— On a

$$\varphi^n(f_1) = \varphi^{n-1}(\varphi(e_1 + e_3)) = \varphi^{n-1}(0) = 0\ ,$$

$$\varphi^n(f_2) = \varphi^{n-1}(\varphi(e_1 + e_2 + e_3)) = \varphi^{n-1}(f_1) = 0 \text{ si } n > 1$$

$$\text{et } \varphi^n(f_3) = \varphi^{n-1}(\varphi(-e_1 + e_3)) = \varphi^{n-1}(f_3) = f_3\ .$$

Bref

$$B^n = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

dès que $n > 1$.

Barême indicatif : Application du cours (3 points). Exercice 1 (4=2+2 points). Exercice 2 (4=1+1+2points). Exercice 3). Exercice 4 (9=2+2+1+1+2+1points).