DEVOIR SURVEILLÉ N$^{\rm O}$ 2
DURÉE : 1 HEURE 15

Tous les documents sont interdits, ainsi que les calculatrices et les téléphones portables. Les exercices sont indépendants.

Question de cours. Énoncer la définition (avec quantificateurs) d'une fonction continue en un point $x_0 \in \mathbb{R}$. Donner un exemple de fonction continue en 0, et de fonction non continue en 0.

Exercice 1. Soit $a, b \in \mathbb{R}$. Effectuer la division euclidienne du polynôme $P = X^4 + X^3 + aX^2 + bX + 2$ par $Q = X^2 + 2$. Pour quelles valeurs de a et b le polynôme P est-il divisible par Q ? Écrire la factorisation correspondante.

Exercice 2. Calculer le pgcd des polynômes suivants :

$$X^4 + X^3 - 3X^2 - 4X - 1, \quad X^3 + X^2 - X - 1.$$

Exercice 3. On note $E = \mathbb{R}_3[X]$ l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels, de degré au plus 3. Pour tout $P \in E$, on note $\varphi(P)$ le polynôme

$$\varphi(P) = (X+1)P' - 2P,$$

où P' est le polynôme dérivé de P.

1. Montrer que si $P \in E$, alors $\varphi(P) \in E$. On peut donc définir l'application $\varphi : E \to E$.
2. Montrer que φ est un endomorphisme de E (c'est-à-dire une application linéaire de E dans lui-même).
3. Écrire la matrice de φ relativement à la base canonique $(1, X, X^2, X^3)$ de E.
4. Déterminer une base de $\mathrm{Ker}(\varphi)$ et en déduire le rang de φ puis une base de son image.
5. On considère les polynômes
$$Q_1 = 1, \quad Q_2 = X + 1, \quad Q_3 = (X+1)^2, \quad Q_4 = (X+1)^3.$$
Montrer que (Q_1, Q_2, Q_3, Q_4) forme une base de E.
6. Déterminer 4 coefficients $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$ tels que pour $i = 1, \ldots, 4$,
$$\varphi(Q_i) = \lambda_i \, Q_i.$$
En déduire la matrice de φ dans cette nouvelle base.