

## Contrôle 2

### Mardi 3 Avril 2018

---

*Durée : 1h15.*

*Tous les documents sont interdits, ainsi que les calculatrices et les téléphones portables.  
Les exercices sont indépendants entre eux. Une attention particulière sera portée sur la  
rédaction. Toute affirmation doit être justifiée.*

---

**Question de cours.** Énoncer la définition avec quantificateur d'une fonction tendant vers 0 lorsque  $x$  tend vers  $x_0$ . En donner un exemple puis un contre-exemple (fonction ne tendant pas vers 0) lorsque  $x$  tend vers 0.

**Exercice 1.** Considérons les polynômes

$$P(X) = X^4 + X^3 - 11X^2 - 5X + 6$$

et

$$Q(X) = X^4 - X^3 - 4X^2 - 5X - 3$$

dans  $\mathbb{R}[X]$ .

- a) En utilisant l'algorithme d'Euclide, calculer le P.G.C.D de  $P$  et  $Q$ .
- b) Trouver les racines complexes de  $P$  et  $Q$ .

**Exercice 2.** Soit  $E = \mathbb{R}_3[X]$  l'espace vectoriel des polynômes de degré au plus 3. Considérons l'application  $\varphi : E \rightarrow E$  telle que pour tout  $P \in E$  on a :

$$\varphi(P) = (X^3 + 2X + 1)P'' - 6XP,$$

où  $P''$  est le polynôme dérivé seconde de  $P$ .

- a) Montrer que  $\varphi$  est un endomorphisme de  $E$  (c'est à dire une application linéaire de  $E$  dans lui-même).
- b) Donner (en justifiant) la matrice de  $\varphi$  dans la base canonique des monômes de  $E$ .
- c) Calculer le noyau et l'image de  $\varphi$ .

**Barème indicatif : Question de cours (2 points). Exercice 1 (8 points). Exercice 2 (10=2+4+4 points).**