Université Paris Diderot Paris 7
Licence L1 (S2)
2017-2018

Département de Sciences Exactes
Algèbre et analyse élémentaires II
MI2 Groupe 2

# (Un) Corrigé du Contrôle 2

Mercredi 4 avril 2018

---

**Exercice 1.** Déterminer les limites suivantes :

— $\frac{x^3-8}{x-2}$ lorsque $x$ tend vers $2$ ;

— $\frac{\sqrt{x}-1}{x-1}$ lorsque $x$ tend vers $1$ ;

— $\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}$ lorsque $x$ tend vers $0$ (par valeur positive) ;

— $x-x^2$ lorsque $x$ tend vers $+\infty$ .

**Indications.**

— Lorsque $x$ tend vers $2$ , les expressions $x^3-8$ et $x-2$ tendent vers $0$ . Il s'agit donc d'une forme indéterminée "0/0" . Mais on a

$$x^3-8=(x-2)(x^2+2x+4) \text{ soit } \frac{x^3-8}{x-2}=x^2+2x+4\ .$$

Donc

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^3-8}{x-2}=12\ .$$

— Lorsque $x$ tend vers $1$ , les expressions $\sqrt{x}-1$ et $x-1$ tendent vers $0$ . Il s'agit donc d'une forme indéterminée "0/0" . Mais

$$x-1=(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1) \text{ soit } \frac{\sqrt{x}-1}{x-1}=\frac{1}{\sqrt{x}+1}$$

d'où une limite cherchée égale à $\frac{1}{2}$ .

— On a

$$\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}=-\frac{1}{x^2}(1-x)\ .$$

Or $\frac{1}{x^2}$ tend vers $+\infty$ si $x$ tend vers $0$ (par valeur positive) et $1-x$ tend vers $1$ . Ainsi $\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}$ tend vers $-\infty$ . On remarquera qu'il en est de même lorsque $x$ tend vers $0$ par valeurs négatives.

— De même

$$x-x^2=-x^2\left(1-\frac{1}{x}\right)$$

Or $1-\frac{1}{x}$ tend vers $1$ lorsque $x$ tend vers $+\infty$ . Au final, notre expression tend vers $-\infty$ si $x$ tend vers $+\infty$ .

**Exercice 2.** On considère les deux polynômes

$$A=X^4+2X^3-X-2 \text{ et } B=X^4+X^3+5X^2+4X+4\ .$$

— Déterminer le plus grand commun diviseur de $A$ et de $B$ à l'aide de l'algorithme d'Euclide.

— En déduire les racines réelles des deux polynômes $A$ et $B$ .
— Quelles sont les racines complexes de ces deux polynômes ?

**Indications**.

— Les polynômes $A$ et de $B$ ont le même degré. Commençons donc par diviser $B$ par $A$ :

$$\begin{array}{c|c} X^4+X^3+5X^2+4X+4 & X^4+2X^3-X-2 \\ \hline X^4+2X^3-X-2 & 1 \\ \hline -X^3+5X^2+5X+6 & \end{array}$$

Soit
$$B = A - X^3 + 5X^2 + 5X + 6 \ .$$
Divisons ensuite $A$ par le reste obtenu :

$$\begin{array}{c|c} X^4+2X^3-X-2 & -X^3+5X^2+5X+6 \\ \hline X^4-5X^3-5X^2-6X & -X-7 \\ \hline 7X^3+5X^2+5X-2 & \\ 7X^3-35X^3-35X-42 & \\ 40X^2+40X+40 & \end{array}$$

Soit
$$X^4+2X^3-X-2 = (-X^3+5X^2+5X+6)(-X-7)+40X^2+40X+40 \ .$$
Ce dernier polynôme est multiple de $X^2+X+1$ donc continuons en divisant $-X^3+5X^2+5X+6$ par $X^2+X+1$ .

$$\begin{array}{c|c} -X^3+5X^2+5X+6 & X^2+X+1 \\ \hline -X^3-X^2-X & -X+6 \\ \hline 6X^2+6X+6 & \\ \hline 6X^2+6X+6 & \\ 0 & \end{array}$$

Soit
$$-X^3+5X^2+5X+6 = (X^2+X+1)(-X+6) \ .$$
Le dernier reste non nul est donc le polynôme $X^2+X+1$ est donc le PGCD de $A$ et $B$ .

— Donnons la factorisation des deux polynômes $A$ et $B$ qui en résulte.
$$A = X^4+2X^3-X-2 = (X^2+X+1)(X^2+X-2)$$
et
$$B = X^4+X^3+5X^2+4X+4 = (X^2+X+1)(X^2+4) \ .$$
Or $X^2+X-2=(X-1)(X+2)$ . Enfin les trinômes $X^2+X+1$ et $X^2+4$ n'ont pas de racines réelles. Donc $A$ a pour racines réelles $\{1,-2\}$ et $B$ n'a aucune racine réelle.

— Les racines complexes de $X^2+4$ sont égales à $2i$ et $-2i$ . Enfin les racines complexes de $X^2+X+1$ sont les racines complexes troisièmes de l'unité soit

$$j=-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2} \text{ et } \overline{j}(=j^2)=-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2} \ .$$

Les racines de $A$ sont donc $\{1,-2,j,\overline{j}\}$ et celles de $B$ $\{2i,-2i,j,\overline{j}\}$ .

**Exercice 3.** On posera $E=\mathbb{R}_2[X]$ (espace vectoriel des polynômes de degré au plus 2). Soit $P$ un élément de $E$ . On considère l'application $\varphi$ qui, à $P$ , associe le polynôme

$$Q=\varphi(P)=2XP+(1-X^2)P'$$

(où $P'$ désigne le polynôme dérivé de $P$).

— Montrer que $\varphi$ est un endomorphisme de $E$ (application linéaire de $E$ dans $E$).

— Déterminer la matrice de $\varphi$ dans la base (canonique) des monômes de $E$ .

— Déterminer le rang de cette matrice. Donner une base de l'image de $\varphi$ .

— Déterminer le noyau de $\varphi$ (en donner une base).

— On introduit $Q_1=1-X^2$ , $Q_2=1+2X+X^2$ et $Q_3=1-2X+X^2$ . Vérifier que le système $\{Q_1,Q_2,Q_3\}$ forme une base de $E$ .

— Trouver la matrice de $\varphi$ dans cette nouvelle base.

**Indications**.

— Pour montrer que $\varphi$ est une application linéaire, il suffit de montrer que, pour tout couple de scalaires $(\lambda,\mu)$ ,

$$\varphi(\lambda P+\mu Q)=\lambda\varphi(P)+\mu\varphi(Q) \ .$$

Or

$$\varphi(\lambda P+\mu Q)=2X(\lambda P+\mu Q)+(1-X^2)(\lambda P+\mu Q)'=2\lambda XP+2\mu XQ+\lambda(1-X^2)P'+\mu(1-X^2)Q'$$

soit

$$\varphi(\lambda P+\mu Q)=\lambda\varphi(P)+\mu\varphi(Q) \ .$$

Reste à remarquer que les polynômes $2XP$ et $(1-X^2)P'$ ont un degré au plus 3 .

— Pour déterminer la matrice de $\varphi$ , il nous suffit de calculer $\varphi(1)$ , $\varphi(X)$ et $\varphi(X^2)$ . Or

$$\varphi(1)=2X\times 1+(1-X^2)\times 0=2X \ ;$$

$$\varphi(X)=2X^2+(1-X^2)\times 1=1+X^2 \ ;$$

$$\varphi(X^2)=2X^3+(1-X^2)\times 2X=2X \ .$$

D'où la matrice

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \ .$$

— Cette matrice est clairement de rang 2 puisque

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \ .$$

Les polynômes $2X$ et $1+X^2$ appartiennent à l'image et ne sont pas proportionnels. Ils forment donc une base de l'image.

— On peut résoudre le système

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

mais aussi remarquer que $\varphi(1) = \varphi(X^2)$ soit $\varphi(1 - X^2) = 0$ . Une base du noyau est donc formé du polynôme $X^2 - 1$ . En effet, d'après le théorème du rang, on sait que le noyau est de dimension $3 - 2 = 1$ .

— On introduit $Q_1 = 1 - X^2$ , $Q_2 = 1 + 2X + X^2$ et $Q_3 = 1 - 2X + X^2$ . La matrice de passage associée est donc

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -2 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} .$$

Or

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -2 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -2 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} .$$

Cette matrice est donc bien de rang 3 donc le système $\{Q_1, Q_2, Q_3\}$ forme une base de $E$ .

— On sait que

$$\varphi(1 - X^2) = 0 .$$

$$\varphi(1 + 2\epsilon X + X^2) = \varphi(1) + 2\epsilon\varphi(X) + \varphi(X^2) = 4X + 2\epsilon(1 + X^2)$$

soit

$$\varphi(1+2X+X^2) = 2(1+2X+X^2) = 2Q_2 \text{ et } \varphi(1-2X+X^2) = -2(1-2X+X^2) = -2Q_3 .$$

Bref la matrice de $\varphi$ dans cette nouvelle base est

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} .$$