

DEVOIR SURVEILLÉ N° 1

DURÉE : 1 HEURE

Tous les documents sont interdits, ainsi que les calculatrices et les téléphones portables. Les exercices sont indépendants.

Question de cours. Définir la notion de système libre de vecteurs dans \mathbb{R}^n . Donner un exemple de système libre de 3 vecteurs dans \mathbb{R}^4 .

Exercice 1. Soit a un paramètre réel. Discuter suivant la valeur de a et résoudre le système linéaire suivant :

$$\begin{cases} ax + y + z = 1 \\ x + ay + z = 1 \\ x + y + az = 1 \end{cases}$$

Exercice 2. Dans \mathbb{R}^3 , on considère l'ensemble

$$F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + 3y - 4z = 0\}.$$

1. Montrer que F est un sous-espace vectoriel de \mathbb{R}^3 .
2. Déterminer une base de F et en déduire sa dimension.

Exercice 3. Dans l'espace vectoriel \mathbb{R}^3 , on considère les vecteurs $v = (2, -1, 3)$ et $w = (-4, 2, m)$.

1. À quelle condition sur le paramètre m le vecteur w est-il proportionnel à v ?
2. On suppose que w n'est pas proportionnel à v et on définit $P = \text{Vect}\{v, w\}$. Déterminer trois réels a, b, c tels que pour tout vecteur $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$,

$$(x, y, z) \in P \Leftrightarrow ax + by + cz = 0.$$

Exercice 4. On considère les vecteurs suivants dans \mathbb{R}^4 :

$$u_1 = (1, 0, -2, 2), \quad u_2 = (-2, 1, 0, 1), \quad u_3 = (7, -2, -2, 4), \quad u_4 = (3, -1, 2, 1),$$

et on note E le sous-espace vectoriel de \mathbb{R}^4 généré par $\{u_1, u_2, u_3, u_4\}$.

1. Montrer que la famille $\{u_1, u_2, u_3, u_4\}$ est liée.
2. Extraire de cette famille une base de E .