Contrôle 1

Mercredi 14 février 2018

Durée : 1 heure.

*Tous les documents sont interdits, ainsi que les calculatrices et les téléphones portables.
Les exercices sont indépendants entre eux. Une attention particulière sera portée à la rédaction.*

Question de cours. Soit F un sous-espace vectoriel réel de $\mathbb{R}^n$. Qu'est-ce qu'un système générateur de F ? En donner un exemple où F est un sous-espace vectoriel non réduit à $\{0\}$ et distinct de $\mathbb{R}^n$ (par exemple pour $n = 2$ ou $n = 3$).

Exercice 1. Soient (x, y, z, t) des variables réelles.

— Résoudre le système suivant :

$$\begin{cases} x - y + z & = 0 \\ y - z + t & = 0 \\ x + y + z + t & = 0 \\ x + t & = 0 \end{cases} ;$$

— Résoudre le système suivant :

$$\begin{cases} x - y + z & = 0 \\ y - z + t & = 1 \\ x + y + z + t & = 0 \\ x + t & = \lambda \end{cases} .$$

On discutera suivant la valeur du paramètre réel λ .

On considère les quatre vecteurs de $\mathbb{R}^4$ donnés par $u_1 = (1, 0, 1, 1)$, $u_2 = (-1, 1, 1, 0)$, $u_3 = (1, -1, 1, 0)$ et $u_4 = (0, 1, 1, 1)$ et on note F le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$ qu'ils engendrent.

- Extraire du système $\{u_1, u_2, u_3, u_4\}$ un système libre qui reste générateur de F ;
- Donner la dimension et une base de F ;
- A quelle condition portant sur x, y, z, t le vecteur $u = (x, y, z, t)$ appartient-il à F ?

Exercice 2. On considère le sous-espace vectoriel F de $\mathbb{R}^3$ engendré par les 4 vecteurs suivants : $v_1 = (1, -1, 1)$, $v_2 = (1, 1, -1)$, $v_3 = (1, 1, 1)$ et $v_4 = (-1, 1, 1)$.

- Déterminer toutes les combinaisons linéaires nulles possibles de ces quatre vecteurs.
- En déduire la dimension de F et une base de F .
- Soit G le sous-espace vectoriel engendré par les vecteurs $\{v_1, v_2\}$. Le comparer à F (lui est-il contenu? le contient-il?).
- Déterminer les vecteurs e_i ($i = 1, 2, 3$) de la base canonique de $\mathbb{R}^3$ qui appartiennent à G . En déduire un supplémentaire de G dans $\mathbb{R}^3$.
- Comparer G au sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ défini par $H = \{(x, y, z, t) ; x + y + z = 0\}$.

Barème indicatif : Question de cours (2 points). Exercice 1 (8=2+2+2+1+1 points). Exercice 2 (10=2+2+2+2+2 points).