Université Paris Diderot Paris 7
Licence L1 (S2)
2017-2018

Département de Sciences Exactes
Algèbre et analyse élémentaires II
MI2 Groupe 2

(Un) Corrigé du Contrôle 1

Mercredi 14 février 2018

Question de cours. Soit F un sous-espace vectoriel réel de $\mathbb{R}^n$. Qu'est-ce qu'un système générateur de F ? En donner un exemple où F est un sous-espace vectoriel non réduit à $\{0\}$ et distinct de $\mathbb{R}^n$ (par exemple pour $n = 2$ ou $n = 3$).

Indications. Soit $\{u_1, \ldots, u_m\}$ un système de m vecteurs de F . On dit qu'il est générateur de F si tout vecteur u de F est une combinaison linéaire des vecteurs u_i :

$$u = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i u_i$$

où les λ_i $(i = 1, \ldots, m)$ sont des scalaires réels. On peut prendre e_1 (premier vecteur de la base canonique). Il engendre la droite $\mathbb{R}e_1$ qui est un sous-espace vectoriel strict de $\mathbb{R}^2$ ou $\mathbb{R}^3$ (ou $\mathbb{R}^n$ pour $n \geq 2$).

Exercice 1. Soient (x, y, z, t) des variables réelles.

— Résoudre le système suivant :

$$\begin{cases} x - y + z & = & 0 \\ y - z + t & = & 0 \\ x + y + z + t & = & 0 \\ x + t & = & 0 \end{cases} ;$$

— Résoudre le système suivant :

$$\begin{cases} x - y + z & = & 0 \\ y - z + t & = & 1 \\ x + y + z + t & = & 0 \\ x + t & = & \lambda \end{cases} .$$

On discutera suivant la valeur du paramètre réel λ .

On considère les quatre vecteurs de $\mathbb{R}^4$ donnés par $u_1 = (1, 0, 1, 1)$, $u_2 = (-1, 1, 1, 0)$, $u_3 = (1, -1, 1, 0)$ et $u_4 = (0, 1, 1, 1)$ et on note F le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$ qu'ils engendrent.

— Extraire du système $\{u_1, u_2, u_3, u_4\}$ un système libre qui reste générateur de F ;

— Donner la dimension et une base de F ;

— A quelle condition portant sur x, y, z, t le vecteur $u = (x, y, z, t)$ appartient-il à F ?

Indications. Mis sous forme matricielle le système (homogène) s'écrit

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} .$$

Appliquons la méthode du pivot de Gauss :

$$\begin{pmatrix}1 & -1 & 1 & 0\\ 0 & 1 & -1 & 1\\ 1 & 1 & 1 & 1\\ 1 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix}1 & -1 & 1 & 0\\ 0 & 1 & -1 & 1\\ 0 & 2 & 0 & 1\\ 0 & 1 & -1 & 1\end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix}1 & -1 & 1 & 0\\ 0 & 1 & -1 & 1\\ 0 & 0 & 2 & -1\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix} .$$

Donc notre système (4 équations à 4 inconnues) est de rang 3 . D'après le cours il aura donc une infinité de solutions à $4-3=1$ paramètre. La résolution est (par exemple) la suivante :

$$\begin{cases} x-y+z & = & 0\\ y-z+t & = & 0\\ x+y+z+t & = & 0\\ x+t & = & 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x-y+z & = & 0\\ y-z+t & = & 0\\ 2z-t & = & 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t & = & 2z\\ y & = & -z\\ x & = & -2z\end{cases} .$$

Ainsi les solutions de ce système s'écrivent

$$(-2z,-z,z,2z) = z(-2,-1,1,2) .$$

Passons au système avec second membre. Nous savons que ce système aura une équation de compatibilité. Si l'on reprend la méthode ci-dessus, on l'obtient facilement

$$\left(\begin{array}{cccc|c}1 & -1 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & -1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 0 & 1 & \lambda\end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c}1 & -1 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & -1 & 1 & 1\\ 0 & 2 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 1 & -1 & 1 & \lambda\end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c}1 & -1 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & -1 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 2 & -1 & -2\\ 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda-1\end{array}\right) .$$

Donc, si $\lambda \neq 1$, le système est impossible. Si $\lambda = 1$, on sait que le système admet une infinité de solutions à 1 paramètre :

$$\begin{cases} x-y+z & = & 0\\ y-z+t & = & 1\\ x+y+z+t & = & 1\\ x+t & = & 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x-y+z & = & 0\\ y-z+t & = & 1\\ 2z-t & = & -2\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t & = & 2z+2\\ y & = & -z-1\\ x & = & -2z-1\end{cases} .$$

Les solutions de ce système s'écrivent donc :

$$(-2z-1,-z-1,z,2z+2) = (-1,-1,0,2) + z(-2,-1,1,2) .$$

La matrice formée (en colonnes) par les coordonnées des quatre vecteurs $u_1,\dots,u_4$ s'écrit :

$$\begin{pmatrix}1 & -1 & 1 & 0\\ 0 & 1 & -1 & 1\\ 1 & 1 & 1 & 1\\ 1 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix} .$$

Ainsi, d'après ce qui précède, on sait qu'il s'agit d'une matrice de rang 3 . Le système des quatre vecteurs est donc de rang 3 . Il est lié. La dimension de l'espace F engendré par ce système est donc de 3 . On peut remarquer que la matrice extraite formée par les trois premières colonnes reste de rang 3 . Aussi le système $\{u_1,u_2,u_3\}$ est libre et forme donc une base de F . On peut aussi remarquer que les combinaisons linéaires non triviales des quatre vecteurs sont données par les solutions du système homogène :

$$z(-2u_1-u_2+u_3+2u_4) = 0$$

(quelque soit z dans $\mathbb{R}$). On sait donc que $2u_1 + u_2 - u_3 - 2u_4 = 0$ (ce qu'il est facile de vérifier). Cette relation montre que chacun des qutre vecteurs s'exprime en fonction des trois autres. On sait donc que

$$F =< u_1, u_2, u_3 >=< u_1, u_2, u_4 >=< u_1, u_3, u_4 >=< u_2, u_3, u_4 > \ .$$

Notre sous-espace vectoriel est donc un hyperplan de $\mathbb{R}^4$. Il est de co-dimension 1 donc peut être défini par une équation. On peut donc chercher les coefficients $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ tels que l'équation

$$\alpha x + \beta y + \gamma z + \delta t = 0$$

soit satisfaite par une base de F d'où le système suivant.

$$\begin{cases} \alpha + \gamma + \delta & = & 0 \\ -\alpha + \beta + \gamma & = & 0 \\ \alpha - \beta + \gamma & = & 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \beta + \delta & = & 0 \\ 2\gamma & = & 0 \\ \alpha - \beta + \gamma & = & 0 \end{cases}$$

(en retranchant la dernière ligne aux deux premières). Soit $\gamma = 0$ et $\alpha = \beta = -\delta$. Les équations de F sont donc proportionnelles à $x + y - t = 0$.
Mais on peut également déterminer l'équation de compatibilité du système

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 1 & 0 & x \\ 0 & 1 & -1 & 1 & y \\ 1 & 1 & 1 & 1 & z \\ 1 & 0 & 0 & 1 & t \end{array}\right)$$

soit

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 1 & 0 & x \\ 0 & 1 & -1 & 1 & y \\ 1 & 1 & 1 & 1 & z \\ 1 & 0 & 0 & 1 & t \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 1 & 0 & x \\ 0 & 1 & -1 & 1 & y \\ 0 & 2 & 0 & 1 & z - x \\ 0 & 1 & -1 & 1 & t - x \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 1 & 0 & x \\ 0 & 1 & -1 & 1 & y \\ 0 & 0 & 2 & -1 & z - x - 2y \\ 0 & 0 & 0 & 0 & t - x - y \end{array}\right) .$$

On retrouve bien la condition $x + y - t = 0$.

Exercice 2. On considère le sous-espace vectoriel F de $\mathbb{R}^3$ engendré par les 4 vecteurs suivants : $v_1 = (1, -1, 1)$, $v_2 = (1, 1, -1)$, $v_3 = (1, 1, 1)$ et $v_4 = (-1, 1, 1)$.

- Déterminer toutes les combinaisons linéaires nulles possibles de ces quatre vecteurs.
- En déduire la dimension de F et une base de F .
- Soit G le sous-espace vectoriel engendré par les vecteurs $\{v_1, v_2\}$. Le comparer à F (lui est-il contenu ? le contient-il ?).
- Déterminer les vecteurs e_i $(i = 1, 2, 3)$ de la base canonique de $\mathbb{R}^3$ qui appartiennent à G . En déduire un supplémentaire de G dans $\mathbb{R}^3$.
- Comparer G au sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ défini par $H = \{(x, y, z, t) \ ; x + y + z = 0\}$.

Indications. Il s'agit donc de résoudre le système

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda \\ \mu \\ \nu \\ \rho \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} .$$

On a immédiatement

$$\begin{pmatrix}1 & 1 & 1 & -1\\ -1 & 1 & 1 & 1\\ 1 & -1 & 1 & 1\end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix}1 & 1 & 1 & -1\\ 0 & 2 & 2 & 0\\ 0 & -2 & 0 & 2\end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix}1 & 1 & 1 & -1\\ 0 & 2 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 2 & 2\end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix}1 & 1 & 1 & -1\\ 0 & 1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 1\end{pmatrix} .$$

Le rang est donc 3 donc la dimension de F est 3 . Donc $F = \mathbb{R}^3$. On savait que 4 vecteurs de $\mathbb{R}^3$ ne pouvaient être libres et étaient liés. On voit que les trois premiers vecteurs forment un système libre. Mais, de façon générale, les solutions du système sont les suivantes :

$$\begin{pmatrix}1 & 1 & 1 & -1\\ -1 & 1 & 1 & 1\\ 1 & -1 & 1 & 1\end{pmatrix} \begin{pmatrix}\lambda\\ \mu\\ \nu\\ \rho\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\ 0\\ 0\end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases}\lambda + \mu + \nu - \rho & = & 0\\ \mu + \nu & = & 0\\ \nu + \rho & = & 0\end{cases}$$

ce qui indique que les combinaisons linéaires nulles sont de la forme $\rho(v_1 + v_2 - v_3 + v_4) = 0$. Donc chacun des quatre vecteurs s'exprime en fonction des trois autres.

Le sous-espace vectoriel G est engendré par deux vecteurs qui font partie d'un système libre dans $\mathbb{R}^3$. Il est donc de dimension 2 (de co-dimension 1). Il est contenu strictement dans $F = \mathbb{R}^3$. Il est défini par une équation. Or l'équation $\alpha x + \beta y + \gamma z = 0$ de G doit être vérifiée par v_1 et v_2 soit le système

$$\begin{cases}\alpha - \beta + \gamma & = & 0\\ \alpha + \beta - \gamma & = & 0\end{cases} \leftrightarrow \begin{cases}2\alpha & = & 0\\ 2(\beta - \gamma) & = & 0\end{cases}$$

soit $\alpha = 0$ et $\beta = \gamma$. Bref l'équation de G est $y + t = 0$. Donc $G \neq H$. Enfin le vecteur e_1 appartient à G mais pas les vecteurs e_2 ou e_3 . L'un de ces deux derniers vecteurs engendre donc une droite supplémentaire de G dans $\mathbb{R}^3$.

$$G \oplus \mathbb{R}e_2 = G \oplus \mathbb{R}e_3 = \mathbb{R}^3 .$$