Université Paris Diderot Paris 7 | **Département de Sciences Exactes**
Licence L1 (S2) | Algèbre et analyse élémentaires II
2016-2017 | MI2

Examen Terminal

28 juin 2017

Durée : 3 heures.

Tous les documents sont interdits, ainsi que les calculatrices et les téléphones portables. Les exercices sont indépendants entre eux. Une attention particulière sera portée à la rédaction.

---

1. **Application du cours.** On considère la partie

$$H = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \ ; \ x - y + z - t = 0\}$$

de l'espace vectoriel $\mathbb{R}^4$.
— Rappeler pourquoi H en est un sous-espace vectoriel. En donner la dimension et trouver une base de H .
— Le vecteur e_1 de la base canonique de $\mathbb{R}^4$ appartient-il à H ? Trouver un supplémentaire de H dans $\mathbb{R}^4$.

2. **Exercice 1**.
— On considère la fonction

$$f(x) = \ln(1+x) - x \ .$$

Quel est son domaine de définition ? Sur quel intervalle cette fonction est-elle continue ? dérivable ? Déterminer les variations de f .
— Soit la fonction

$$h(x) = \ln(1+x) - x + \frac{x^2}{2} \ .$$

Quel est son domaine de définition ? Sur quel intervalle cette fonction est-elle continue ? dérivable ? dérivable à l'ordre 2 ? Déterminer $h''(x)$ et en déduire les variations de $h'(x)$ puis de $h(x)$.
— Déduire des deux questions précédentes que

$$\forall x > 0 \ , \ x - \frac{x^2}{2} < \ln(1+x) < x \ .$$

3. **Exercice 2**.
Soit $E = \mathbb{R}_3[X]$ l'espace vectoriel des polynômes de degré au plus 3 . On considère le système formé des polynômes $P_1 = 2 + X$, $P_2 = 3 - X^2$, $P_3 = 4 + X^3$ et $P_4 = -2X + X^3$. Ce système est-il libre ? est-il générateur

de E ? Donner une base du sous-espace F de E engendré par ces quatre vecteurs. Soit α un paramètre réel. À quelle condition sur $\alpha \in \mathbb{R}$ le polynôme

$$Q = \alpha - X + X^2 - X^3$$

appartient-il à F ?

4. **Exercice 3**. On note e_1 ,e_2 et e_3 les vecteurs de la base canonique de $\mathbb{R}^3$. On considère le système de vecteurs

$$\{f_1, f_2, f_3\} = \{e_1 - 3e_2 - e_3, e_1 - 2e_2, e_2 + e_3\} .$$

— Le système $\{f_1, f_2, f_3\}$ est-il libre ? Sinon, quel est son rang ?
— Déterminer toutes les combinaisons linéaires nulles possibles pour ces trois vecteurs.

On considère désormais l'application linéaire l donnée par $l(e_1) = f_1$, $l(e_2) = f_2$ et $l(e_3) = f_3$.
— En déterminer la matrice dans la base canonique.
— Quel est le rang de l ? En déduire la dimension du noyau de l .
— Trouver une base du noyau de l . On note u_1 le vecteur de ce noyau qui admet 1 comme coordonnée sur e_1 .
— Trouver l'image par l du vecteur $u_2 = e_2 + e_3$ puis trouver l'image par l du vecteur $u_3 = e_3$.
— Le système $\{u_1, u_2, u_3\}$ forme-t-il une base de $\mathbb{R}^3$?
— Si oui, donner la matrice de l dans la base $\{u_1, u_2, u_3\}$.

Barême indicatif : Application du cours (3=2+1 points). Exercice 1 (7=3+3+2 points). Exercice 2 (5=1+1+1+2 points). Exercice 3 (9=(2+1)+(1+1+1+1+1+1) points).