Université Paris Diderot Paris 7 **Département de Sciences Exactes**
Licence L1 (S2) Algèbre et analyse élémentaires II
2016-2017 MI2

(Un) Corrigé de l'examen Terminal

28 juin 2017

1. **Application du cours.** On considère la partie
$$H = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \ ; \ x - y + z - t = 0\}$$
de l'espace vectoriel $\mathbb{R}^4$.
— Rappeler pourquoi H en est un sous-espace vectoriel. En donner la dimension et trouver une base de H .
— Le vecteur e_1 de la base canonique de $\mathbb{R}^4$ appartient-il à H ? Trouver un supplémentaire de H dans $\mathbb{R}^4$.

Éléments de réponse. Deux méthodes.

Première méthode. La partie H de $\mathbb{R}^4$ est une partie non vide puisqu'elle contient le vecteur nul $(0, 0, 0, 0)$. Il reste à vérifier que cette partie est stable par combinaison linéaire. Soient $u = (x, y, z, t)$ et $v = (x', y', z', t')$ deux vecteurs de H . Soient α et β deux réels. Étudions le vecteur $\alpha u + \beta v$. Il vaut $\alpha u + \beta v = (\alpha x + \beta x', \alpha y + \beta y', \alpha z + \beta z', \alpha t + \beta t')$. Il nous reste à étudier la somme alternée de ses coordonnées :
$$(\alpha x + \beta x') - (\alpha y + \beta y') + (\alpha z + \beta z') - (\alpha t + \beta t') = \\ \alpha(x - y + z - t) + \beta(x' - y' + z' - t') = 0 \ .$$

Deuxième méthode. L'application l donnée par
$$(x, y, z, t) \mapsto l(u) = x - y + z - t$$
est une forme linéaire puisque l'image de $\alpha u + \beta v$ vaut $\alpha l(u) + \beta l(v)$ (d'après le calcul précédent). Alors H est le noyau de cette forme linéaire. C'est donc un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$.

Le cours nous donne alors la dimension de H . C'est un hyperplan de $\mathbb{R}^4$ de co-dimension 1 (défini par une équation indépendante) et de dimension $3 = 4 - 1$. Une base est constituée par trois vecteurs indépendants. Or
$$u = (x, y, z, t) \in H \Leftrightarrow t = x - y + z \Leftrightarrow u = x(1, 0, 0, 1) + y(0, 1, 0, -1) + z(0, 0, 1, 1) \ .$$
Donc les vecteurs $\{(1, 0, 0, 1), (0, 1, 0, -1), (0, 0, 1, 1)\}$ forment une base de H .

Le vecteur $e_1 = (1, 0, 0, 0)$ n'appartient pas à H (il ne vérifie pas l'équation définissant H). La droite qu'il engendre forme donc un supplémentaire de H dans $\mathbb{R}^4$.

2. **Exercice 1**.
   — On considère la fonction

$$f(x) = \ln(1+x) - x .$$

   Quel est son domaine de définition ? Sur quel intervalle cette fonction est-elle continue ? dérivable ? Déterminer les variations de f .

   — Soit la fonction

$$h(x) = \ln(1+x) - x + \frac{x^2}{2} .$$

   Quel est son domaine de définition ? Sur quel intervalle cette fonction est-elle continue ? dérivable ? dérivable à l'ordre 2 ? Déterminer $h''(x)$ et en déduire les variations de $h'(x)$ puis de $h(x)$.

   — Déduire des deux questions précédentes que

$$\forall x > 0 \ , \ x - \frac{x^2}{2} < \ln(1+x) < x .$$

Éléments de réponse.

— La fonction $\ln(1+x)$ est définie, continue et dérivable à tous les ordres sur l'intervalle $]-1, +\infty[$ puisque $\ln(x)$ est définie, continue et dérivable à tous les ordres sur l'intervalle $]0, +\infty[$. La dérivée de f vaut donc

$$f'(x) = \frac{1}{1+x} - 1 = -\frac{x}{1+x} .$$

Cette fonction est positive sur $]-1, 0[$ puis négative sur $]0, +\infty[$. Ainsi f est croissante sur $]-1, 0[$ puis décroissante sur $]0, +\infty[$. En -1 , elle tend vers $-\infty$ si x tend vers -1 à droite. Et elle tend vers $-\infty$ en $+\infty$ puisque

$$f(x) = -x\left(1 - \frac{\ln(1+x)}{x}\right) .$$

Donc

$$\forall x > 0 f(x) < f(0) = 0 .$$

— De façon analogue, la fonction $h(x) = \ln(1+x) - x + \frac{x^2}{2}$ est définie, continue et dérivable à tous les ordres sur l'intervalle $]-1, +\infty[$. Sa dérivée vaut

$$h'(x) = \frac{1}{1+x} - 1 + x = \frac{1 - 1 - x + x + x^2}{1+x} = \frac{x^2}{1+x} .$$

Ainsi h est-elle croissante sur son intervalle de définition. En particulier

$$\forall x > 0 \ h(x) > h(0) = 0 .$$

— Ainsi nous avons obtenu un encadrement de $\ln(1+x)$ qui est vérifié pour tous les $x > 0$:

$$\forall x > 0\ ,\ x - \frac{x^2}{2} < \ln(1+x) < x\ .$$

3. **Exercice 2**.

Soit $E = \mathbb{R}_3[X]$ l'espace vectoriel des polynômes de degré au plus 3 . On considère le système formé des polynômes $P_1 = 2 + X$, $P_2 = 3 - X^2$, $P_3 = 4 + X^3$ et $P_4 = -2X + X^3$. Ce système est-il libre ? est-il générateur de E ? Donner une base du sous-espace F de E engendré par ces quatre vecteurs. Soit α un paramètre réel. À quelle condition sur $\alpha \in \mathbb{R}$ le polynôme

$$Q = \alpha - X + X^2 - X^3$$

appartient-il à F ?

Éléments de réponse. Cet espace vectoriel est celui des polynômes qui s'écrivent

$$P = a_0 + a_1 X + a_2 X^2 + a_3 X^3\ .$$

Il est de dimension 4 . Dans la base des monômes $\{1, X, X^2, X^3\}$, le système $\{P_1, P_2, P_3, P_4\}$ est donné par

$$(P_1, P_2, P_3, P_4) = (1, X, X^2, X^3) \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}\ .$$

Cette matrice est-elle échelonnée ? On a

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 & 0 \end{pmatrix} \leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 4 & 4 \end{pmatrix}$$

soit encore

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 4 & 4 \end{pmatrix} \leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\ .$$

Cette matrice n'est pas inversible (elle est de rang 3) et n'est pas une matrice de passage. On sait donc que l'espace engendré par ces 4 polynômes est un espace de dimension 3 . Or le système des polynômes $\{P_1, P_2, P_3\}$ est formé

de polynômes ayant deux à deux un degré distinct ; il est donc libre. Bref le sous-espace F est engendré par ces trois polynômes.
Le polynôme Q appartient à F si et seulement si on a

$$Q = \lambda P_1 + \mu P_2 + \nu P_3$$

puisque ces trois polynômes forment une base de F . Soit l'équation

$$\alpha - X + X^2 - X^3 = \lambda(2+X) + \mu(3-X^2) + \nu(4+X^3) = 2\lambda + 3\mu + 4\nu + \lambda X - \mu X^2 + \nu X^3$$

qui équivaut au système

$$\begin{cases} \alpha & = & 2\lambda + 3\mu + 4\nu \\ -1 & = & \lambda \\ 1 & = & -\mu \\ -1 & = & \nu \end{cases}$$

soit la condition $\alpha = -9$.

4. **Exercice 3**. On note e_1 ,e_2 et e_3 les vecteurs de la base canonique de $\mathbb{R}^3$. On considère le système de vecteurs

$$\{f_1, f_2, f_3\} = \{e_1 - 3e_2 - e_3, e_1 - 2e_2, e_2 + e_3\} .$$

— Le système $\{f_1, f_2, f_3\}$ est-il libre ? Sinon, quel est son rang ?
— Déterminer toutes les combinaisons linéaires nulles possibles pour ces trois vecteurs.

On considère désormais l'application linéaire l donnée par $l(e_1) = f_1$, $l(e_2) = f_2$ et $l(e_3) = f_3$.
— En déterminer la matrice dans la base canonique.
— Quel est le rang de l ? En déduire la dimension du noyau de l .
— Trouver une base du noyau de l . On note u_1 le vecteur de ce noyau qui admet 1 comme coordonnée sur e_1 .
— Trouver l'image par l du vecteur $u_2 = e_2 + e_3$ puis trouver l'image par l du vecteur $u_3 = e_3$.
— Le système $\{u_1, u_2, u_3\}$ forme-t-il une base de $\mathbb{R}^3$?
— Si oui, donner la matrice de l dans la base $\{u_1, u_2, u_3\}$.

Éléments de réponse.
— Étudions e système $\{f_1, f_2, f_3\}$. Il s'écrit

$$\begin{pmatrix} f_1 & f_2 & f_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -3 & -2 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} .$$

Nous étudierons le rang de cette matrice. On a

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -3 & -2 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

en rajoutant 3 fois la première ligne à la seconde (et 1 fois la première ligne à la troisième. Bref cette matrice est de rang 2 . Notre système de vecteurs est de rang 2 . D'ailleurs on remarque que

$$-f_1 + f_2 = f_3 \, .$$

— Ces trois vecteurs forment un système de rang 2 . Toutes les combinaisons linéaires nulles de ces trois vecteus sont donc proportionnelles à l'une d'entre elles soit $f_1 - f_2 + f_3 = 0$.

On considère désormais l'application linéaire l donnée par $l(e_1) = f_1$, $l(e_2) = f_2$ et $l(e_3) = f_3$.

— La matrice de l dans la base canonique est donnée par définition par

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -3 & -2 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \, .$$

— Son rang est donc 2 . Par le théorème du rang, la dimension du noyau de l est donc de $3 - 2 = 1$.

— Trouvons une base du noyau de l . On peut résoudre le système $l(u) = 0$ ou remarquer, d'après ce qui précède, que

$$f_1 - f_2 + f_3 = l(e_1) - l(e_2) + l(e_3) = l(e_1 - e_2 + e_3) = 0 \, .$$

On note $u_1 = e_1 - e_2 + e_3$.

— Cherchons $l(u_2) = l(e_2) + l(e_3) = f_2 + f_3 = e_1 - e_2 + e_3 = u_1$. Puis

$$l(u_3) = l(e_3) = f_3 = e_2 + e_3 = u_2 \, .$$

— On a

$$\begin{pmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

et cette matrice est échelonnée.

— La matrice de l dans la base $\{u_1, u_2, u_3\}$ est formée des coordonnées des images de cette base par l , coordonnées dans cette nouvelle base. Et nous les avons déterminées ci-dessus (puisque $l(u_1) = 0$) :

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \, .$$