Université Paris Diderot Paris 7 **Département de Sciences Exactes**
Licence L1 (S2) Algèbre et analyse élémentaires II
2016-2017 MI2

Examen Partiel

11 Mars 2017

Durée : 3 heures.

Tous les documents sont interdits, ainsi que les calculatrices et les téléphones portables. Les exercices sont indépendants entre eux. Une attention particulière sera portée à la rédaction.

1. **Question de cours.**
   Soit f une application linéaire d'un espace vectoriel réel $E = \mathbb{R}^m$ dans un autre espace vectoriel réel $F = \mathbb{R}^n$. Énoncer le théorème du rang pour l'application linéaire f . Donner un exemple d'application linéaire non nulle dont le noyau n'est pas réduit à $\{0\}$.

2. **Exercice 1**. On considère la matrice suivante

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} .$$

   (a) Soient (a, b, c, d) des paramètres réels. Résoudre le système

$$A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix}$$

   en les inconnues (x, y, z, t) (on discutera éventuellement en fonction des valeurs des quatre paramètres a, b, c, d).

   (b) La matrice A est-elle inversible ? Si oui, calculer son inverse.

3. **Exercice 2**. On considère le système formé par les trois vecteurs

$$u_1 = (1, -1, 2) \; ; \; u_2 = (1, 0, 1) \text{ et } u_3 = (0, -1, 1)$$

   où $\{e_1, e_2, e_3\}$ est la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

   (a) Trouver toutes les combinaisons linéaires nulles de ces trois vecteurs.

(b) Soit $u = (x, y, z)$ un vecteur quelconque de $\mathbb{R}^3$. A quelle(s) condition(s) portant sur (x, y, z) est-il engendré par le système $\{u_1, u_2, u_3\}$?

On considère désormais l'application linéaire φ de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$ donnée par

$$\varphi(e_1) = (1, -1, 2) \ ; \ \varphi(e_2) = (1, 0, 1) \text{ et } \varphi(e_3) = (0, -1, 1)$$

où $\{e_1, e_2, e_3\}$ est la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

(a) Soit $u = (x, y, z)$ un vecteur quelconque de $\mathbb{R}^3$. Donner les coordonnées de l'image de u par φ .

(b) Déterminer la dimension de l'image de φ . En donner une base et un système d'équations.

(c) En déduire la dimension du noyau de φ et en donner une base.

(d) Noyau et image de φ sont-ils supplémentaires dans $\mathbb{R}^3$?

4. **Exercice 3**.
Considérons l'application linéaire $L : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ ayant la matrice suivante relativement aux bases canoniques de ces deux espaces :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

(a) Donner des bases du noyau et de l'image de L .

(b) L est-elle injective ? surjective ?

On considère désormais l'endomorphisme Φ de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$ donné par la matrice

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ -1 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} .$$

(a) Déterminer l'image et le noyau de Φ.

(b) Montrer que le système

$$\begin{aligned} f_1 &= 2e_1 - e_2 + e_3 \\ f_2 &= e_1 - e_2 + e_3 \\ f_3 &= -2e_1 + 5e_2 + e_3 \end{aligned}$$

forme une base de $\mathbb{R}^3$ (où e_1 , e_2 et e_3 représentent les vecteurs de la base canonique).

(c) Calculer la matrice C de Φ dans la base $\{f_1, f_2, f_3\}$.

(d) Calculer, pour tout $n \in \mathbb{N}$, les vecteurs $\Phi^n(f_1)$, $\Phi^n(f_2)$ et $\Phi^n(f_3)$.

Barême indicatif : Question de cours (4 points). Exercice 1 (4=3+1 points). Exercice 2 (7=[2+1]+[1+1+1+1] points). Exercice 3 (7=1+1+1+1+2+1 points).