Université Paris Diderot Paris 7
Licence L1 (S2)
2016-2017

Département de Sciences Exactes
Algèbre et analyse élémentaires II
MI2

(Un) Corrigé de l'examen partiel

1. **Question de cours.**
   Soit f une application linéaire d'un espace vectoriel réel $E = \mathbb{R}^m$ dans un autre espace vectoriel réel $F = \mathbb{R}^n$. Énoncer le théorème du rang pour l'application linéaire f . Donner un exemple d'application linéaire non nulle dont le noyau n'est pas réduit à $\{0\}$.

   Éléments de réponse. Le théorème du rang relie les dimensions respectives de l'image de f et de son noyau par l'égalité :

   $$m = \mathrm{Dim}(E) = \mathrm{Dim}(\mathrm{Im}(f)) + \mathrm{Dim}(\mathrm{Ker}(f)) \ .$$

   On rappelle que

   $$\mathrm{Im}(f) = \{v \in F; \exists u \in E\ v = f(u)\} \text{ et } \mathrm{Ker}(f) = \{u \in E; f(u) = 0\} \ .$$

   Prenons la projection p de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$ qui, à $u = (x, y)$ associe $p(u) = (x, 0)$. Par construction, le noyau de p est formé des vecteurs $(0, y)$ vecteurs de la droite engendrée par e_2 et l'image est la droite engendrée par e_1 . On a bien

   $$2 = \mathrm{Dim}(\mathbb{R}^2) = 1 + 1 \ .$$

2. **Exercice 1**. On considère la matrice suivante

   $$A = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \ .$$

   (a) Soient (a, b, c, d) des paramètres réels. Résoudre le système

   $$A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix}$$

   en les inconnues (x, y, z, t) (on discutera éventuellement en fonction des valeurs des quatre paramètres).

(b) La matrice A est-elle inversible ? Si oui, calculer son inverse.

Éléments de réponse.

(a) Échelonnons la matrice

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 0 & -2 & 0 & 1 & a \\ 0 & 0 & 1 & -3 & b \\ -1 & 1 & 0 & 0 & c \\ 1 & 0 & 0 & 0 & d \end{array}\right).$$

On a, par exemple,

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 0 & -2 & 0 & 1 & a \\ 0 & 0 & 1 & -3 & b \\ -1 & 1 & 0 & 0 & c \\ 1 & 0 & 0 & 0 & d \end{array}\right) \leftrightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & d \\ 0 & -2 & 0 & 1 & a \\ 0 & 0 & 1 & -3 & b \\ -1 & 1 & 0 & 0 & c \end{array}\right)$$

soit

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & d \\ 0 & -2 & 0 & 1 & a \\ 0 & 0 & 1 & -3 & b \\ -1 & 1 & 0 & 0 & c \end{array}\right) \leftrightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & d \\ 0 & 1 & 0 & 0 & c+d \\ 0 & -2 & 0 & 1 & a \\ 0 & 0 & 1 & -3 & b \end{array}\right)$$

puis finalement

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & d \\ 0 & 1 & 0 & 0 & c+d \\ 0 & -2 & 0 & 1 & a \\ 0 & 0 & 1 & -3 & b \end{array}\right) \leftrightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & d \\ 0 & 1 & 0 & 0 & c+d \\ 0 & 0 & 1 & -3 & b \\ 0 & 0 & 0 & 1 & a+2c+2d \end{array}\right).$$

Puisque le système est de rang 4 , on voit qu'il admet une solution unique quelles que soient les valeurs de (a, b, c, d) . De plus on a

$$A\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{ccc} x & = & d \\ y & = & c+d \\ z-3t & = & b \\ t & = & a+2c+2d \end{array}\right.$$

soit

$$(x, y, z, t) = (d, c+d, 3a+b+6c+6t, a+2c+2d).$$

(b) La matrice A est de rang maximal 4 . Elle est donc inversible et

$$A\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} \Leftrightarrow A^{-1}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}.$$

Aussi
$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 6 & 6 \\ 1 & 0 & 2 & 2 \end{pmatrix} .$$
Cette matrice peut être considérée soit comme la matrice de l'application réciproque de $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}$ soit comme la matrice de passage de la base formée des vecteurs colonnes de A vers la base canonique.

3. **Exercice 2**. On considère le système formé par les trois vecteurs

$$u_1 = (1, -1, 2) \ ; \ u_2 = (1, 0, 1) \text{ et } u_3 = (0, -1, 1)$$

où $\{e_1, e_2, e_3\}$ est la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

(a) Trouver toutes les combinaisons linéaires nulles de ces trois vecteurs.

(b) Soit $u = (x, y, z)$ un vecteur quelconque de $\mathbb{R}^3$. A quelle(s) condition(s) portant sur (x, y, z) est-il engendré par le système $\{u_1, u_2, u_3\}$?

On considère désormais φ l'application linéaire de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$ qui est donnée par
$$\varphi(e_1) = (1, -1, 2) \ ; \ \varphi(e_2) = (1, 0, 1) \text{ et } \varphi(e_3) = (0, -1, 1)$$
où $\{e_1, e_2, e_3\}$ est la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

(a) Soit $u = (x, y, z)$ un vecteur quelconque de $\mathbb{R}^3$. Donner les coordonnées de l'image de u par φ .

(b) Déterminer la dimension de l'image de φ . En donner une base et un système d'équations.

(c) En déduire la dimension du noyau de φ et en donner une base.

(d) Noyau et image de φ sont-ils supplémentaires dans $\mathbb{R}^3$?

Éléments de réponse.

(a) Les combinaisons linéaires nulles de ces trois vecteurs sont donc les solutions du système

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda \\ \mu \\ \nu \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} .$$

Si l'on échelonne ce système, on obtient

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda \\ \mu \\ \nu \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda \\ \mu \\ \nu \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

soit finalement

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda \\ \mu \\ \nu \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda + \mu & = & 0 \\ \mu & = & \nu \end{cases} .$$

Toutes les combinaisons linéaires nulles sont donc données par $(\lambda, \mu, \nu) = (\lambda, -\lambda, -\lambda)$. Elles sont donc toutes proportionnelles à la combinaison linéaire $u_1 - u_2 - u_3$. Ainsi $u_3 = u_1 - u_2$. Bref le système formé par ces trois vecteurs est en fait engendré par les deux premiers vecteurs. Comme u_1 et u_2 ne sont pas proportionnels, on sait que ce système engendre un sous-espace vectoriel H de dimension 2 .

(b) Soit $u = (x, y, z)$ un vecteur quelconque de $\mathbb{R}^3$. Il est engendré par le système $\{u_1, u_2, u_3\}$ si et seulement s'il appartient à ce sous-espace de dimension 2 (donc de co-dimension 1). Un tel sous-espace est défini par la donnée d'une équation. On peut la trouver de deux façons. Tout d'abord en reprenant l'échelonnement précédent :

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & x \\ -1 & 0 & -1 & y \\ 2 & 1 & 1 & z \end{array}\right) \leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & x \\ 0 & 1 & -1 & x+y \\ 0 & -1 & 1 & -2x+z \end{array}\right)$$

soit

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & x \\ -1 & 0 & -1 & y \\ 2 & 1 & 1 & z \end{array}\right) \leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & x \\ 0 & 1 & -1 & x+y \\ 0 & 0 & 0 & -x+y+z \end{array}\right) .$$

Ainsi H a-t-il pour équation $x - y - z = 0$. On aurait pu également chercher les équations $ax + by + cz = 0$ satisfaites par les deux premiers vecteurs engendrant H (puisque le troisième est une combinaison linéaire des deux premiers) soit

$$\begin{cases} a - b + 2c & = & 0 \\ a + c & = & 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b & = & -a \\ c & = & -a \end{cases} .$$

On (re-)trouve donc les équations de la forme $a(x - y - z) = 0$.

On considère désormais φ l'application linéaire de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$ qui est donnée par

$$\varphi(e_1) = (1, -1, 2) \; ; \; \varphi(e_2) = (1, 0, 1) \text{ et } \varphi(e_3) = (0, -1, 1)$$

où $\{e_1, e_2, e_3\}$ est la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

(a) Soit $u = (x, y, z)$ un vecteur quelconque de $\mathbb{R}^3$. Par définition de la matrice d'un endomorphisme (vis à vis de la base canonique), les coordonnées de $\varphi(u)$ sont données par

$$A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+y \\ -x-z \\ 2x+y+z \end{pmatrix} .$$

(b) L'image de φ est engendrée par les images des vecteurs de la base canonique donc par les u_i ($i = 1, 2, 3$). D'après les questions précédentes, l'image de φ est le plan H engendré par u_1 et u_2 , plan d'équation $x - y - z = 0$.

(c) D'après le théorème du rang, le noyau de φ est de dimension $3 - 2 = 1$. Il s'agit donc d'une droite engendré par les vecteurs solutions du système

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} .$$

Nous avons calculé ces solutions. Il s'agit de $(x, -x, -x)$. Bref le vecteur $(1, -1, -1)$ engendre le noyau de φ .

(d) Noyau (de dimension 1) et image de φ (de dimension 2) sont supplémentaires dans $\mathbb{R}^3$ si et seulement si ils engendrent $\mathbb{R}^3$ ou leur intersection est réduite à $\{0\}$. Or il est très simple de vérifier si les vecteurs du noyau appartiennent à l'image puisque l'on dispose d'une équation de cette image. Ici

$$1 - (-1) - (-1) = 3 \neq 0 .$$

Donc le noyau et l'image de φ sont supplémentaires dans $\mathbb{R}^3$.

(e) Il existe des bases adaptées à la situation. On peut vérifier que la matrice de φ dans la base des vecteurs $\{f_1, f_2, f_3\}$ où

$$f_1 = (1, -1, -1) \ ; \ f_2 = (1, 0, 1) : \text{et } f_3 = (0, 1, -1)$$

est simple. En effet $\varphi(f_1) = 0$. Par ailleurs
$\varphi(f_2) = \varphi(e_1) + \varphi(e_3) = (1, -2, 3) = f_2 - 2f_3$
et $\varphi(f_3) = \varphi(e_2) - \varphi(e_3) = (1, 1, 0) = f_2 + f_3$. Aussi la matrice de φ dans cette base est

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix} .$$

Ce qui est sensiblement plus simple que la matrice initiale.

4. **Exercice 3**.

Considérons l'application linéaire $L : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ ayant la matrice suivante relativement aux bases canoniques de ces deux espaces :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

(a) Donner des bases du noyau et de l'image de L .

(b) L est-elle injective ? surjective ?

On considère désormais l'endomorphisme Φ de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$ donné par la matrice

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ -1 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} .$$

(a) Déterminer l'image et le noyau de Φ.

(b) Montrer que le système

$$\begin{aligned} f_1 &= 2e_1 - e_2 + e_3 \\ f_2 &= e_1 - e_2 + e_3 \\ f_3 &= -2e_1 + 5e_2 + e_3 \end{aligned}$$

forme une base de $\mathbb{R}^3$ (où e_1 , e_2 et e_3 représentent les vecteurs de la base canonique).

(c) Calculer la matrice C de Φ dans la base $\{f_1, f_2, f_3\}$.

(d) Calculer, pour tout $n \in \mathbb{N}$, les vecteurs $\Phi^n(f_1)$, $\Phi^n(f_2)$ et $\Phi^n(f_3)$.

Éléments de réponse.

Étudions L .

(a) L'image de L est engendré par les vecteurs $L(e_1)$ et $L(e_2)$. Comme ces vecteurs ne sont pas proportionnels, on voit que l'image de L est de dimension 2 et que ces vecteurs en forment une base. D'après le théorème du rang, le noyau de L est de dimension $2 - 2 = 0$. Donc L est injectif. Mais il ne peut être surjectif. L'image est formée des vecteurs de $\mathbb{R}^3$ combinaisons linéaires des vecteurs $L(e_1)$ et $L(e_2)$. Elle est déterminée par une équation $ax + by + cz = 0$ où les coefficients (a, b, c) vérifient :

$$\begin{cases} a - b + c = 0 \\ b + c = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c = -b \\ a = 2b \end{cases}$$

soit l'équation $2x + y - z = 0$.

(a) Le noyau de Φ est donné par les solutions du système $BX = 0$ soit

$$\begin{cases} x - 2z & = & 0 \\ -x + y + 3z & = & 0 \\ x + y - z & = & 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x & = & 2z \\ y + z & = & 0 \\ y + z & = & 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x & = & 2z \\ y & = & -z \end{cases}$$

soit $\mathrm{Ker}(\Phi) = \mathbb{R}(2, -1, 1)$. Le noyau est donc une droite engendrée par le vecteur $(2, -1, 1)$ et, d'après le théorème du rang, l'image est de dimension $3 - 1 = 2$. Comme elle contient l'image de L puisque $\Phi(e_1) = L(e_1)$ et $\Phi(e_2) = L(e_2)$, cette image a pour base $L(e_1)$ et $L(e_2)$ et est définie par l'équation $2x + y - z = 0$. On notera que

$$(-2, 3, -1) = -2(1, -1, 1) + (0, 1, 1) .$$

(b) Comme on connait les expressions des vecteurs f_i ($i = 1, 2, 3$) en fonction des vecteurs de la base canonique

$$\begin{aligned} f_1 &= 2e_1 - e_2 + e_3 \\ f_2 &= e_1 - e_2 + e_3 \\ f_3 &= -2e_1 + 5e_2 + e_3 \end{aligned}$$

il nous suffit de chercher les expressions des vecteurs de la base canonique en fonction des f_i ($i = 1, 2, 3$). Soit

$$\begin{cases} f_1 & = & 2e_1 - e_2 + e_3 \\ f_2 & = & e_1 - e_2 + e_3 \\ f_3 & = & -2e_1 + 5e_2 + e_3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f_2 + e_2 - e_3 & = & e_1 \\ f_1 - 2f_2 & = & e_2 - e_3 \\ 2f_2 + f_3 & = & 3e_2 + 3e_3 \end{cases}$$

puis

$$\begin{cases} f_1 & = & 2e_1 - e_2 + e_3 \\ f_2 & = & e_1 - e_2 + e_3 \\ f_3 & = & -2e_1 + 5e_2 + e_3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f_2 + e_2 - e_3 & = & e_1 \\ 3f_1 - 4f_2 + f_3 & = & 6e_2 \\ -3f_1 + 8f_2 + f_3 & = & 6e_3 \end{cases} .$$

Finalement $6e_1 = 6f_2 + 6e_2 - 6e_3$ soit

$$6e_1 = 6f_2 + 3f_1 - 4f_2 + f_3 + 3f_1 - 8f_2 - f_3 = 6f_1 - 6f_2 .$$

Bref la matrice de passage des f_i aux e_i est

$$\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -1 & -\frac{2}{3} & \frac{4}{3} \\ 0 & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} \end{pmatrix} .$$

Notons que nous aurions pu nous contenter d'échelonner la matrice

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ -1 & -1 & 5 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

soit

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ -1 & -1 & 5 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -4 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix} .$$

Et cela montre que notre système de vecteurs est de rang 3 donc forme une base de $\mathbb{R}^3$.

(c) Par définition de la matrice C , elle est formée, en colonne, des coordonnées des vecteurs $\Phi(f_1), \Phi(f_2), \Phi(f_3)$ dans la base des f_i ($i = 1, 2, 3$). Or f_1 est une base du noyau de Φ donc $\Phi(f_1) = 0f_1 + 0f_2 + 0f_3$. D'ailleurs (c'est une vérification inutile)

$$\Phi(f_1) = 2\Phi(e_1) - \Phi(e_2) + \Phi(e_3) = 2e_1 - 2e_2 + 2e_3 - e_2 - e_3 - 2e_1 + 3e_2 - e_3 = 0 .$$

Passons à l'étude de $\Phi(f_2)$ et $\Phi(f_3)$.

$$\Phi(f_2) = \Phi(e_1) - \Phi(e_2) + \Phi(e_3) = e_1 - e_2 + e_3 - e_2 - e_3 - 2e_1 + 3e_2 - e_3$$

soit

$$\Phi(f_2) = -e_1 + e_2 - e_3 = -f_2 .$$

Enfin

$$\Phi(f_3) = -2\Phi(e_1) + 5\Phi(e_2) + \Phi(e_3) = -2e_1 + 2e_2 - 3e_3 + 5e_2 + 5e_3 - 2e_1 + 3e_2 - e_3$$

soit

$$\Phi(f_3) = -4e_1 + 10e_2 + 2e_3 = 2f_3 .$$

Bref la matrice C est donnée par

$$C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} .$$

(d) Par récurrence, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$\Phi^{n+1}(f_1) = \Phi(0^n f_1) = 0f_1 = 0$$

$$\Phi^{n+1}(f_2) = \Phi((-1)^n f_2) = (-1)^{n+1} f_2$$

$$\text{et } \Phi^{n+1}(f_3) = \Phi(2^n f_3) = 2^{n+1} f_3 .$$

Bref, dans la base $\{f_1, f_2, f_3\}$, la matrice de Φ^n est

$$C^n = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & (-1)^n & 0 \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix} .$$