Université Paris Diderot Paris 7
Licence L1 (S2)
2016-2017

Département de Sciences Exactes
Algèbre et analyse élémentaires II
MI2

Examen Terminal

17 mai 2017

Durée : 3 heures.

Tous les documents sont interdits, ainsi que les calculatrices et les téléphones portables. Les exercices sont indépendants entre eux. Une attention particulière sera portée à la rédaction.

---

1. **Application du cours.**
   Soit f une fonction numérique continue sur l'intervalle $[-1, 1]$. On suppose que $f(-1) = 1$ et $f(1) = 3$. La valeur 2 est-elle atteinte par f entre -1 et 1 ? Que peut-on dire de l'équation $f(c) = 0$?
   On suppose de plus que $f(0) = -1$. Quel est le nombre minimal de solutions de l'équation $f(c) = 0$ où $c \in [-1, 1]$?

2. **Exercice 1**. Soit a un paramètre réel. À quelle condition sur a le polynôme réel $X^4 - X^3 + 2X^2 - X + a + 1$ est-il divisible par le polynôme réel $X^2 + 1$?

3. **Exercice 2**. On souhaite démontrer que
$$\forall x \geq 0 \ , \ 0 \leq \frac{e^2 x^2}{4} \leq \exp(x) \ .$$
   On considère la fonction $f(x) = x^2 \exp(-x)$. Sur quel intervalle de $\mathbb{R}$ est-elle continue ? dérivable ? En étudier les variations puis montrer que f est bornée sur $[0, +\infty[$. Puis conclure en prouvant l'inégalité cherchée.

4. **Exercice 3**.
   On considère la partie
$$F = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \ ; \ x - 2y + 3z - 4t = 0\} \ .$$
   Rappeler pourquoi F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$. Quelle est sa dimension ? En donner une base.

5. **Exercice 4**.
   On considère l'application linéaire φ de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$ donnée par la matrice
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \ .$$

(a) Déterminer le noyau de φ . On en donnera une base.

(b) Déterminer l'image de φ . On en donnera une base et une équation.

(c) L'application φ est-elle inversible ?

(d) Montrer que le système

$$\begin{aligned} f_1 &= e_1 + e_2 - e_3 \\ f_2 &= -3e_1 - 2e_2 + e_3 \\ f_3 &= e_1 + e_2 \end{aligned}$$

forme une base de $\mathbb{R}^3$ (où e_1 , e_2 et e_3 représentent les vecteurs de la base canonique).

(e) Calculer la matrice B de φ dans la base $\{f_1, f_2, f_3\}$.

(f) Calculer, pour tout $n \in \mathbb{N}$, les vecteurs $\varphi^n(f_1)$, $\varphi^n(f_2)$ et $\varphi^n(f_3)$.

Barème indicatif : Application du cours (4 points). Exercice 1 (3 points). Exercice 2 (4=1+1+1+1 points). Exercice 3 (3=1+1+2). Exercice 4 (10=2+2+1+2+2+1 points).