
(Un) Corrigé de l'examen Terminal
17 mai 2017

1. **Application du cours.**

Soit f une fonction numérique continue sur l'intervalle $[-1, 1]$. On suppose que $f(-1) = 1$ et $f(1) = 3$. La valeur 2 est-elle atteinte par f entre -1 et 1 ? Que peut-on dire de l'équation $f(c) = 0$?

On suppose de plus que $f(0) = -1$. Quel est le nombre minimal de solutions de l'équation $f(c) = 0$ où $c \in [-1, 1]$?

Éléments de réponse. Par le théorème des valeurs intermédiaires, on voit que l'image par f de l'intervalle $[-1, 1]$ doit contenir toutes les valeurs réelles comprises entre 1 et 3. Bref $f([-1, 1]) \subset [1, 3]$. Donc 2 est atteinte au moins une fois par f sur l'intervalle $[-1, 1]$. Par contre on ne peut rien affirmer sur l'équation $f(c) = 0$ puisque $0 \notin [1, 3]$. La fonction $f(x) = x + 3$ vérifie ces hypothèses et ne s'annule pas entre -1 et 1 . Par contre la fonction $g(x) = 2x^2 + x$ vérifie ces hypothèses et s'annule en 0.

Si l'on suppose de plus que $f(0) = -1$, on voit que f change de signe entre -1 et 0 donc s'annule dans l'intervalle $] -1, 0[$ puis change de signe à nouveau entre 0 et 1 donc s'annule dans l'intervalle $]0, 1[$. Aussi, sous cette nouvelle hypothèse, l'équation $f(c) = 0$ admet-elle au moins deux solutions. Mais, bien sûr, il existe des fonctions (par exemple polynomiales) qui vérifient ces hypothèses et s'annulent autant de fois que l'on veut entre -1 et 1 .

2. **Exercice 1.** Soit a un paramètre réel. À quelle condition sur a le polynôme réel $P = X^4 - X^3 + 2X^2 - X + a + 1$ est-il divisible par le polynôme réel $X^2 + 1$?

Éléments de réponse. *Variante 1.* Le polynôme $X^2 + 1$ admet i et $-i$ comme racines complexes. Le polynôme P sera divisible par $X^2 + 1$ si et seulement si $P(i) = P(\bar{i}) = 0$. Mais, pour cela, il suffit de vérifier que $P(i) = 0$. Soit

$$i^4 - i^3 + 2i^2 - i + a + 1 = 0 \Leftrightarrow 1 + i - 2 - i + a + 1 = 0 \Leftrightarrow a = 0.$$

Variante 2. Effectuons la division euclidienne de P par $X^2 + 1$. On a

$$X^4 - X^3 + 2X^2 - X + a + 1 = X^2(X^2 + 1) - X^3 + X^2 - X + a + 1$$

soit

$$P = (X^2 - X)(X^2 + 1) + X^2 + a + 1 = (X^2 - X + 1)(X^2 + 1) + a.$$

On retrouve donc le résultat précédent. Ce reste est nul si et seulement si $a = 0$.

3. **Exercice 2.** On souhaite démontrer que

$$\forall x \geq 0, 0 \leq \frac{e^2 x^2}{4} \leq \exp(x).$$

On considère la fonction $f(x) = x^2 \exp(-x)$. Sur quel intervalle de $\mathbb{R}$ est-elle continue? dérivable? En étudier les variations puis montrer que f est bornée sur $[0, +\infty[$. Puis conclure en prouvant l'inégalité cherchée.

Éléments de réponse. La fonction $f(x) = x^2 \exp(-x)$ est un produit de fonctions définies, continues et dérivables (à tous les ordres) sur $\mathbb{R}$. On a $f'(x) = 2x \exp(-x) - x^2 \exp(-x) = x(2 - x) \exp(-x)$. On voit immédiatement que f' est négative lorsque $x < 0$ et $x > 2$. Donc f décroît sur $] -\infty, 0[$ puis croît sur $]0, 2[$ puis décroît à nouveau de $[2, +\infty[$. En $+\infty$ elle tend vers 0^+ et, en $-\infty$, elle tend vers $+\infty$. Enfin elle vaut 0 en 0 et $\frac{4}{e^2}$ en 2. Aussi

$$\forall x \geq 0 \quad x^2 \exp(-x) \leq \frac{4}{e^2}.$$

Soit

$$\forall x \geq 0, 0 \leq \frac{e^2 x^2}{4} \leq \exp(x).$$

4. **Exercice 3.**

On considère la partie

$$F = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4; x - 2y + 3z - 4t = 0\}.$$

Rappeler pourquoi F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$. Quelle est sa dimension? En donner une base.

Éléments de réponse. *Méthode n°1.* L'application φ qui, à $(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4$, associe le réel $x - 2y + 3z - 4t$ est linéaire puisqu'elle préserve les combinaisons linéaires. En effet

$$\forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2, \forall u = (x, y, z, t), v = (x', y', z', t') \in \mathbb{R}^4;$$

on a

$$\varphi(\lambda u + \mu v) = (\lambda x + \mu x' - 2(\lambda y + \mu y') + 3(\lambda z + \mu z') - 4(\lambda t + \mu t'))$$

et

$$\varphi(\lambda u + \mu v) = \lambda \varphi(u) + \mu \varphi(v) .$$

Alors F est le noyau de φ donc est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$.

Méthode n°2. Mais nous pouvons aussi procéder directement :

$$\forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2, \forall u = (x, y, z, t), v = (x', y', z', t') \in F ;$$

étudions le vecteur

$$\lambda u + \mu v = (\lambda x + \mu x', \lambda y + \mu y', \lambda z + \mu z', \lambda t + \mu t') .$$

On a

$$\begin{aligned} &(\lambda x + \mu x' - 2(\lambda y + \mu y') + 3(\lambda z + \mu z') - 4(\lambda t + \mu t')) = \\ &\lambda(x - 2y + 3z - 4t) + \mu(x' - 2y' + 3z' - 4t') = 0\lambda + 0\mu = 0 . \end{aligned}$$

D'après le cours, F est défini par une unique équation. C'est donc un sous-espace vectoriel de co-dimension 1 (hyperplan de $\mathbb{R}^4$). Il est donc de dimension $4 - 1 = 3$. Les vecteurs $(2, 1, 0, 0), (-3, 0, 1, 0), (4, 0, 0, 1)$ sont éléments de F et forment un système libre donc une base de F .

5. Exercice 4.

On considère l'application linéaire φ de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$ donnée par la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} .$$

- (a) Déterminer le noyau de φ . On en donnera une base.
- (b) Déterminer l'image de φ . On en donnera une base et une équation.
- (c) L'application φ est-elle inversible ?
- (d) Montrer que le système

$$\begin{aligned} f_1 &= e_1 + e_2 - e_3 \\ f_2 &= -3e_1 - 2e_2 + e_3 \\ f_3 &= e_1 + e_2 \end{aligned}$$

forme une base de $\mathbb{R}^3$ (où e_1, e_2 et e_3 représentent les vecteurs de la base canonique).

- (e) Calculer la matrice B de Φ dans la base $\{f_1, f_2, f_3\}$.
- (f) Calculer, pour tout $n \in \mathbb{N}$, les vecteurs $\Phi^n(f_1)$, $\Phi^n(f_2)$ et $\Phi^n(f_3)$.

Éléments de réponse.

- (a) Le noyau de φ est défini comme l'ensemble des vecteurs de $\mathbb{R}^3$ dont l'image par φ est nulle. Résolvons donc le système

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

soit

$$\begin{cases} x + y + 2z = 0 \\ 2y + 2z = 0 \\ -x + y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = x \\ z = -y \\ 2x - 2x = 0 \end{cases}.$$

Le noyau est donc formé des vecteurs de la forme $(x, x, -x)$. Il s'agit d'une droite engendrée par le vecteur $(1, 1, -1)$.

- (b) D'après le théorème du rang, l'image est de dimension 2 (de co-dimension 1). Une base est donc formée de deux vecteurs et il suffit d'une équation pour la définir. Or le premier vecteur colonne (l'image de e_1 par φ) et le troisième vecteur colonne (l'image de e_3 par φ) ne sont pas proportionnels. Ainsi $(1, 0, -1)$ et $(1, 1, 0)$ forment une base de l'image de φ . Pour trouver une équation de l'image, il suffit par exemple de déterminer les coefficients a, b, c tels que $ax + by + cz$ soit annulé par ces deux vecteurs soit le système :

$$\begin{cases} a - c = 0 \\ a + b = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c = a \\ b = -a \end{cases}$$

soit l'équation

$$x - y + z = 0.$$

- (c) Comme le noyau de φ n'est pas réduit à $\{0\}$, φ n'est pas inversible.
(d) Étudions le système

$$\begin{aligned} f_1 &= e_1 + e_2 - e_3 \\ f_2 &= -3e_1 - 2e_2 + e_3 \\ f_3 &= e_1 + e_2 \end{aligned}$$

Le vecteur f_3 est non nul. Le vecteur f_1 ne lui est pas proportionnel donc $\{f_1, f_3\}$ est un système libre. Reste à vérifier si f_2 est ou non une combinaison linéaire de ces deux vecteurs. Or

$$f_2 = \alpha f_1 + \beta f_3 \Rightarrow \alpha = -1$$

(les deux coordonnées sur e_3 devant être égales). Reste à comparer les deux autres coordonnées :

$$\begin{cases} -3 = -1 + \beta \\ -2 = -1 + \beta \end{cases}.$$

On voit donc bien qu'il n'existe aucun β qui ne satisfasse ces deux équations.
Le système des $\{f_1, f_2, f_3\}$ est donc bien une base de $\mathbb{R}^3$.

- (e) Calculons la matrice B de Φ dans la base $\{f_1, f_2, f_3\}$. On a tout d'abord $\varphi(f_1) = 0$ puisque f_1 est élément du noyau. Ensuite on a

$$\varphi(f_3) = \varphi(e_1) + \varphi(e_2) = e_1 - e_3 + e_1 + 2e_2 + e_3 = 2f_3.$$

Puis

$$\varphi(f_2) = -3\varphi(e_1) - 2\varphi(e_2) + \varphi(e_3) = -3e_1 + 3e_3 + 2e_1 - 2e_1 - 4e_2 - 2e_3 + 2e_1 + 2e_2$$

soit

$$\varphi(f_2) = -3e_1 - 2e_2 + e_3 = f_2.$$

Finalement

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

- (f) Calculons, pour tout $n \in \mathbb{N}$, les vecteurs $\Phi^n(f_1)$, $\Phi^n(f_2)$ et $\Phi^n(f_3)$. On a

$$\varphi^0(f_1) = f_1, \varphi^1(f_1) = 0 \text{ et } \varphi^{n+1}(f_1) = \varphi^n(\varphi(f_1)) = \varphi^n(0) = 0.$$

Puis

$$\varphi^0(f_2) = f_2, \varphi^1(f_2) = f_2 \text{ et } \varphi^{n+1}(f_2) = \varphi^n(\varphi(f_2)) = \varphi^n(f_2) = f_2$$

soit $\forall n \in \mathbb{N} \varphi^n(f_2) = f_2$. Enfin

$$\varphi^0(f_3) = f_3, \varphi^1(f_3) = 2f_3 \text{ et } \varphi^{n+1}(f_3) = \varphi^n(\varphi(f_3)) = 2\varphi^n(f_3) = 2^{n+1}f_3$$

soit $\forall n \in \mathbb{N} \varphi^n(f_3) = 2^n f_3$.

- (g) Donc

$$n \geq 1, B^n = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix}.$$

Et

$$n \geq 1, A^n = P \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix} P^{-1}$$

où

$$P = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Il est facile de vérifier que

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

(on pourra remarquer que $e_3 = f_3 - f_1$). Finalement, après calcul, on a

$$n \geq 1, A^n = \begin{pmatrix} 3 - 2^n & 2^{n+1} - 3 & 2^n \\ 2 - 2^n & 2^{n+1} - 2 & 2^n \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$