

Examen Session 2

29 Juin 2016

Durée : 3 heures.

Tous les documents sont interdits, ainsi que les calculatrices et les téléphones portables. Les exercices sont indépendants entre eux. Une attention particulière sera portée à la rédaction.

1. **Exercice d'application du cours.** On considère l'application linéaire l de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$ donnée par $(x, y, z) \mapsto (x - y, y - z, z - x)$. Donner la matrice de cette application dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$. Déterminer son rang et la dimension du noyau de l . Vérifier l'application du théorème du rang pour cette application. Donner le noyau et l'image de cette application par une base et un système d'équations.

2. **Exercice 1.** On considère la fonction

$$f(x) = \frac{x^2 - 2x - 2}{(x - 1)(x^2 + x + 1)}.$$

- (a) Déterminer les nombres réels α , β et γ tels que

$$f(x) = \frac{\alpha}{x - 1} + \frac{\beta x + \gamma}{x^2 + x + 1};$$

- (b) En déduire les primitives de la fonction $f(x)$ (on en précisera le domaine de définition);
(c) Donner la primitive de f qui s'annule en $x = 0$.

3. **Exercice 2.** On rappelle que la fonction $x \mapsto \text{Arctan}(x)$, fonction réciproque de la fonction $\tan(x)$ et définie sur $\mathbb{R}$, a pour dérivée $\frac{1}{1+x^2}$.

- (a) Donner une primitive de la fonction $\text{Arctan}(x)$; on pourra utiliser une intégration par partie en écrivant

$$\int \text{Arctan}(t) dt = \int 1 \times \text{Arctan}(t) dt;$$

donner la primitive de cette fonction qui s'annule en $x = 0$;

- (b) En déduire les solutions de l'équation différentielle $y' = \text{Arctan}(x)y$;
 (c) On considère l'équation différentielle

$$y' = \text{Arctan}(x)y + \sqrt{1+x^2} e^{x\text{Arctan}(x)} ;$$

en déterminer une solution particulière ;

- (d) Donner toutes les solutions de cette équation différentielle.

4. Exercice 3.

- (a) On considère les quatre vecteurs f_i de $\mathbb{R}^3$ suivants :

$$f_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, f_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, f_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \text{ et } f_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

- i. Ces vecteurs forment-ils un système libre ?
 - ii. Si non, en donner le rang ;
 - iii. Toujours dans ce dernier cas, donner les combinaisons linéaires reliant ces vecteurs.
- (b) On introduit l'application linéaire l donnée (dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$) par la matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -2 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

- i. Déterminer le rang de l ; donner son image par une base et un système d'équations ;
- ii. Donner la dimension du noyau de l ainsi qu'une base de ce noyau ;
- iii. Le vecteur e_2 (second vecteur de la base canonique de $\mathbb{R}^3$) appartient-il à l'image de l ? Si oui, déterminer tous les vecteurs u dont l'image par l est e_2 ;
- iv. Mêmes questions pour le vecteur e_1 .

Barème indicatif : Application du cours (4 points). Exercice 1 (4=2+1+1 points). Exercice 2 (4=1+1+1+1 points). Exercice 3 (8=1+1+2+1+1+1+1 points).