Université Paris Diderot Paris 7
Licence L1 (S2)
2015-2016

Département de Sciences Exactes
Algèbre et analyse élémentaires II
MI2

Examen Partiel

19 Mars 2016

Durée : 3 heures.

Tous les documents sont interdits, ainsi que les calculatrices et les téléphones portables. Les exercices sont indépendants entre eux. Une attention particulière sera portée à la rédaction.

---

1. **Question de cours.**
   Soit l une application linéaire d'un espace vectoriel réel E dans un autre espace vectoriel réel F . Donner la définition de l'image et du noyau de l'application linéaire l .
   On suppose désormais que E est de dimension finie n . Enoncer le théorème du rang.

2. **Exercice 1**.
   On se place dans $\mathcal{L}(\mathbb{R}^3;\mathbb{R})$, l'espace des formes linéaires sur l'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$.
   (a) Existe-t-il une forme linéaire φ sur $\mathbb{R}^3$ qui vérifie
   $$\varphi((1,1,1)) = 3\ ;\ \varphi((0,1,1)) = 2\ ;\ \varphi((0,0,1)) = 1\ ?$$
   Si oui, donner la valeur de $\varphi((x,y,z))$ quels que soient (x,y,z) dans $\mathbb{R}^3$.
   (b) Existe-t-il une forme linéaire ψ sur $\mathbb{R}^3$ qui vérifie
   $$\psi((1,1,1)) = 4\ ;\ \psi((1,0,0)) = 3\ ;\ \psi((0,1,0)) = 2\ ;\ \psi((0,0,1)) = 1\ ?$$
   Si oui, donner la valeur de $\psi((x,y,z))$ quels que soient (x,y,z) dans $\mathbb{R}^3$.

3. **Exercice 2**.
   On considère l'espace vectoriel E des fonctions polynomiales de degré au plus 2 . On choisit pour E la base des monômes ($x \mapsto 1$ (monôme constant), $x \mapsto x$ (monôme du premier degré) et $x \mapsto x^2$ (monôme du second degré). Soit P une fonction polynomiale élément de E . On posera
   $$P(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2$$
   où a_0, a_1, a_2 sont les coefficients de P . Ce sont donc les coordonnées de P dans la base des monômes.

(a) Vérifier que les fonctions polynomiales $\frac{x(x-1)}{2}$, $-(x^2-1)$ et $\frac{x(x+1)}{2}$ forment une base de E .

(b) En déduire que toute fonction polynomiale P s'écrit

$$\forall x \in \mathbb{R}\ ;\ P(x) = \alpha\,\frac{x(x-1)}{2} - \beta(x^2-1) + \gamma\,\frac{x(x+1)}{2}\ ;$$

exprimer α , β et γ en fonction des coefficients de P ;

(c) Comparer α , β et γ à $P(-1)$, $P(0)$ et $P(1)$;

(d) En déduire qu'il existe une unique fonction polynomiale de degré au plus 2 dont les valeurs en -1 , 0 et 1 sont données.

4. **Exercice 3**.

Supposons que les vecteurs e_1, e_2 et e_3 forment une base de $\mathbb{R}^3$, et considérons un endomorphisme $L : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ ayant la matrice suivante dans la base (e_1, e_2, e_3) :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \\ 5 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

(a) Donner des bases du noyau et de l'image de L.

(b) Etudier si le noyau et l'image de L sont supplémentaires dans $\mathbb{R}^3$.

(c) Calculer la matrice B de L dans la base

$$\begin{aligned} f_1 &= e_1 + e_2 + 3e_3 \\ f_2 &= -e_2 - 2e_3 \\ f_3 &= e_3 \end{aligned}$$

(d) Calculer, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la matrice B^n de l'endomorphisme L^n dans la base (f_1, f_2, f_3) .

(e) On note P la matrice de passage de la base (e_1, e_2, e_3) dans la base (f_1, f_2, f_3) . Donner la relation entre les matrices A et B . En déduire l'expression de A^n pour $n \geq 3$.

Barème indicatif : Question de cours (4 points). Exercice 1 (4=3+2 points). Exercice 2 (5=1+2+1+1 points). Exercice 3 (7=2+1+1+2+1 points).