Université Paris Diderot Paris 7
Licence L1 (S2)
2015-2016

Département de Sciences Exactes
Algèbre et analyse élémentaires II
MI2

(Un) Corrigé de l'examen Partiel

19 Mars 2016

1. **Question de cours.**
   Soit l une application linéaire d'un espace vectoriel réel E dans un autre espace vectoriel réel F . Donner la définition de l'image et du noyau de l'application linéaire l .
   On suppose désormais que E est de dimension finie n . Enoncer le théorème du rang.

   Éléments de réponse.
   L'image de l est le sous-espace vectoriel de F formé par les vecteurs de F ayant un antécédent par l soit
   $$\mathrm{Im}(l) = \{v \in F\ ;\ \exists u \in E\ ;\ v = l(u)\}\ .$$
   Le noyau de l est le sous-espace vectoriel de E formé par les vecteurs de E ayant pour image par l le vecteur nul de F (0_F) soit
   $$\mathrm{Ker}(l) = \{u \in E\ ;\ l(u) = 0_F\}\ .$$
   Lorsque E est de dimension finie n , on a montré en cours que l'image de l était de dimension finie r (aussi appelée rang de l). Le noyau de l, étant un sous-espace vectoriel de E , est aussi de dimension finie soit p . Alors le théorème du rang établit que
   $$\dim(E) = n = p + r = \dim(\mathrm{Ker}(l)) + \dim(\mathrm{Im}(l))\ .$$

2. **Exercice 1**.
   On se place dans $\mathcal{L}(\mathbb{R}^3;\mathbb{R})$, l'espace des formes linéaires sur l'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$.
   (a) Existe-t-il une forme linéaire φ sur $\mathbb{R}^3$ qui vérifie
   $$\varphi((1,1,1)) = 3\ ;\ \varphi((0,1,1)) = 2\ ;\ \varphi((0,0,1)) = 1\ ?$$
   Si oui, donner la valeur de $\varphi((x,y,z))$ quels que soient (x,y,z) dans $\mathbb{R}^3$.

(b) Existe-t-il une forme linéaire ψ sur $\mathbb{R}^3$ qui vérifie

$$\psi((1,1,1)) = 4\ ;\ \psi((1,0,0)) = 3\ ;\ \psi((0,1,0)) = 2\ ;\ \psi((0,0,1)) = 1\ ?$$

Si oui, donner la valeur de $\psi((x,y,z))$ quels que soient (x,y,z) dans $\mathbb{R}^3$.

Éléments de réponse.

(a) L'espace des formes linéaires sur $\mathbb{R}^3$ est un espace vectoriel de dimension 3 . Pour se donner une forme linéaire, il faut et il suffit de se donner les images d'une base quelconque de $\mathbb{R}^3$; par exemple celles de la base canonique. Or les vecteurs

$$u_1 = (1,1,1)\ ;\ u_2 = (0,1,1)\ ;\ u_3 = (0,0,1)$$

s'écrivent $u_1 = e_1 + e_2 + e_3, u_2 = e_2 + e_3, u_3 = e_3$ en fonction des vecteurs de la base canonique soit

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} .$$

On vérifie donc qu'ils forment une base de $\mathbb{R}^3$. Par ailleurs, on a $e_3 = u_3$, $e_2 = e_2 + e_3 - e_3 = u_2 - u_3$ et $e_1 = e_1 + e_2 + e_3 - e_2 - e_3 = u_1 - u_2$. D'où

$$\varphi(x,y,z) = x\varphi(e_1) + y\varphi(e_2) + z\varphi(e_3)\ ,$$

$$\varphi(x,y,z) = x(\varphi(u_1) - \varphi(u_2)) + y(\varphi(u_2) - \varphi(u_3)) + z\varphi(u_3)$$

et

$$\varphi(x,y,z) = x(3-2) + y(2-1) + z = x + y + z\ .$$

(b) On sait que

$$(1,1,1) = (1,0,0) + (0,1,0) + (0,0,1) = e_1 + e_2 + e_3\ .$$

Donc toute forme linéaire ψ vérifiera

$$\psi(1,1,1) = \psi(e_1) + \psi(e_2) + \psi(e_3) = 3 + 2 + 1 = 6\ .$$

Une forme linéaire ψ telle que demandée dans l'énoncé ne peut exister.

3. **Exercice 2**.

On considère l'espace vectoriel E des fonctions polynomiales de degré au plus 2 . On choisit pour E la base des monômes ($x \mapsto 1$ (monôme constant), $x \mapsto x$ (monôme du premier degré) et $x \mapsto x^2$ (monôme du second degré). Soit P une fonction polynomiale élément de E . On posera

$$P(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2$$

où a_0, a_1, a_2 sont les coefficients de P . Ce sont donc les coordonnées de P dans la base des monômes.

(a) Vérifier que les fonctions polynomiales $\frac{x(x-1)}{2}$, $-(x^2-1)$ et $\frac{x(x+1)}{2}$ forment une base de E .

(b) En déduire que toute fonction polynomiale P s'écrit

$$\forall x \in \mathbb{R} \; ; \; P(x) = \alpha \, \frac{x(x-1)}{2} - \beta(x^2-1) + \gamma \, \frac{x(x+1)}{2} \; ;$$

(c) Comparer α , β et γ à $P(-1)$, $P(0)$ et $P(1)$.

Éléments de réponse.

(a) Ecrivons par exemple ces nouveaux vecteurs dans la base canonique :

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -1 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} .$$

Cette matrice s'échelonne par exemple comme suit

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -1 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \leftrightarrow \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \leftrightarrow \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} .$$

Donc notre système de vecteurs initial est bien de rang 3 .

(b) Chercher les coordonnées de P dans cette nouvelle base revient à résoudre le système équivalent à l'identité

$$P(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 = \alpha \, \frac{x(x-1)}{2} - \beta(x^2-1) + \gamma \, \frac{x(x+1)}{2}$$

soit

$$\begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -1 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} .$$

On a donc

$$\begin{cases} a_0 & = & \beta \\ a_1 & = & -\frac{\alpha}{2} + \frac{\gamma}{2} \\ a_2 & = & \frac{\alpha}{2} - \beta + \frac{\gamma}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \beta & = & a_0 \\ \gamma & = & a_0 + a_1 + a_2 \\ \alpha & = & a_0 - a_1 + a_2 \end{cases} .$$

(c) On remarque que l'on a immédiatement $P(0) = a_0 = \beta$, $P(1) = a_0 + a_1 + a_2 = \gamma$ et $P(-1) = a_0 - a_1 + a_2 = \alpha$.

(d) Dans la mesure où les valeurs en -1 , 0 et 1 sont, d'après la question précédente les coordonnées de la fonction polynomiale $x \mapsto P(x)$ dans la base introduite à la première question, on voit qu'il existe une unique fonction polynomiale prenant des valeurs données en ces trois points de $\mathbb{R}$.

4. **Exercice 3**.
Supposons que les vecteurs e_1, e_2 et e_3 forment une base de $\mathbb{R}^3$, et considérons un endomorphisme $L : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ ayant la matrice suivante dans la base (e_1, e_2, e_3) :
$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \\ 5 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$
   (a) Donner des bases du noyau et de l'image de L.
   (b) Etudier si le noyau et l'image de L sont supplémentaires dans $\mathbb{R}^3$.
   (c) Calculer la matrice B de L dans la base
$$\begin{aligned} f_1 &= e_1 + e_2 + 3e_3 \\ f_2 &= -e_2 - 2e_3 \\ f_3 &= e_3 \end{aligned}$$
   (d) Calculer, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la matrice B^n de l'endomorphisme L^n dans la base (f_1, f_2, f_3) .
   (e) On note P la matrice de passage de la base (e_1, e_2, e_3) dans la base (f_1, f_2, f_3) . Donner la relation entre les matrices A et B . En déduire l'expression de A^n pour $n \geq 3$.

Éléments de réponse.

1. On sait que l'image de L est engendrée par les images des vecteurs de la base canonique, autrement dit par les vecteurs colonnes de la matrice A . En déterminer le rang permettra de connaître le nombre de vecteurs nécessaires pour en former une base ; or
$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \\ 5 & 1 & -2 \end{pmatrix} \leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & -1 \\ 0 & 6 & -2 \end{pmatrix} \leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} .$$
Cette matrice est donc de rang 2 . Donc L est de rang 2 et son image est de dimension 2 . Les vecteurs $(-1, 1, 1)$ et $(0, 1, 2)$ (non proportionnels entre eux) forment donc une base de $\operatorname{Im}(L)$. Pour obtenir une équation de $\operatorname{Im}(L)$ (ce sous-espace est de co-dimension 1) on peut soit échelonner
$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & a \\ 2 & 1 & -1 & b \\ 5 & 1 & -2 & c \end{array}\right)$$
jusqu'à obtenir l'équation de compatibilité. On peut aussi chercher une équation $ax + by + cz = 0$ satisfaite par les deux vecteurs de la base trouvée ci-dessus.

Première méthode.

$$\left(\begin{array}{ccc|c}1 & -1 & 0 & a\\ 2 & 1 & -1 & b\\ 5 & 1 & -2 & c\end{array}\right) \leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c}1 & -1 & 0 & a\\ 0 & 3 & -1 & b-2a\\ 0 & 6 & -2 & c-5a\end{array}\right) \leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c}1 & -1 & 0 & a\\ 0 & 3 & -1 & b-2a\\ 0 & 0 & 0 & c-5a-2b+4a\end{array}\right) .$$

Soit l'équation $-a - 2b + c = 0$.

Deuxième méthode. L'équation $ax + by + cz = 0$ doit être satisfaite pour $(-1, 1, 1)$ et $(0, 1, 2)$ soit le système

$$\begin{cases} -a + b + c & = & 0 \\ \quad b + 2c & = & 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b & = & -2c \\ a & = & -c \end{cases}$$

soit les équations

$$c(-x - 2y + z) = 0 .$$

L'équation $x + 2y - z = 0$ est donc une équation de l'image de L .

Passons au noyau. Par le théorème du rang, on sait qu'il est de dimension$3 - 2 = 1$. Les vecteurs de ce sous-espace sont ceux qui sont solutions du système $AX = 0$ soit

$$\begin{pmatrix}1 & -1 & 0\\ 2 & 1 & -1\\ 5 & 1 & -2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\ 0\\ 0\end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x - y & = & 0 \\ 3y - z & = & 0 \end{cases} \Leftrightarrow z = 3x = 3y .$$

Cela donne un système d'équations du noyau. Par ailleurs, le vecteur $(1, 1, 3)$ forme une base du noyau dont les vecteurs s'écrivent tous $x(1, 1, 3)$ où x est un nombre scalaire quelconque.

2. Le vecteur $(1, 1, 3)$ vérifie l'équation de l'image puisque $1 + 2 - 3 = 0$. Donc le noyau de L est contenu dans l'image de L . Les deux sous-espaces ne sont donc pas supplémentaires et, a fortiori, ils ne peuvent être en somme directe.

3. Le vecteur f_1 est une base du noyau. Donc $L(f_1) = 0$. Etudions donc $L(f_2)$ et $L(f_3)$. On a

$$L(f_2) = -L(e_2) - 2L(e_3) = (1, -1, -1) + (0, 2, 4) = (1, 1, 3) = f_1$$

et

$$L(f_3) = (0, -1, -2) = f_2$$

(en utilisant les images des vecteurs de la base canonique). Par définition de la matrice associée à L dans la base des f_i , $i = 1, \ldots, 3$, on a donc

$$B = \begin{pmatrix}0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix} .$$

4. On a immédiatement

$$B^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } B^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 0 \,.$$

Bref $B^n = 0$ dès que $n \geq 3$.

5. D'après le cours on sait que

$$A = PBP^{-1}$$

où

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 3 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

est la matrice de passage de la base des e_i à la base des f_i . Ainsi

$$(f_1, f_2, f_3) = (e_1, e_2, e_3)P = (e_1, e_2, e_3) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 3 & -2 & 1 \end{pmatrix} \,.$$

Il s'agit en effet de mettre en colonnes les coordonnées de la nouvelle base relatives à l'ancienne base.

Par une simple récurrence, on vérifie que

$$A^{n+1} = PB^nP^{-1}PBP^{-1} = PB^{n+1}P^{-1} \,.$$

Bref $A^n = P0P^{-1} = 0$ dès que $n \geq 3$. Et $A^2 = PB^2P^{-1}$. Or la détermination de P^{-1} est assez simple puisqu'on a les identités $e_3 = f_3$, $e_2 = -f_2 - 2f_3$ et $e_1 = f_1 - e_2 - 3e_3 = f_1 + f_2 + 2f_3 - 3f_3 = f_1 + f_2 - f_3$. Soit

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & -2 & 1 \end{pmatrix} \,.$$

Donc

$$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 3 & -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

et

$$A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 1 \\ -1 & -2 & 1 \\ -3 & -6 & 3 \end{pmatrix} \,.$$

Ce dernier résultat peut, bien sûr, être obtenu directement en multipliant A par elle-même !