Université Paris Diderot Paris 7 | **Département de Sciences Exactes**
Licence L1 (S2) | Algèbre et analyse élémentaires II
2015-2016 | MI2

Examen (Session 1)

18 Mai 2016

Durée : 3 heures.

Tous les documents sont interdits, ainsi que les calculatrices et les téléphones portables. Les exercices sont indépendants entre eux. Une attention particulière sera portée à la rédaction.

Question de cours. Soit f une fonction continue sur l'intervalle $I =]\alpha, \beta[$ (α et β étant deux nombres réels). Soient a , b et c trois nombres réels appartenant à l'intervalle I . Enoncer la relation de Chasles.

Application. On prend $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) = \sin(x)$, $I = \mathbb{R}$, $a = -\pi$, $b = 0$ et $c = \pi$. Comparer $\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\,dt$, $\int_{-\pi}^{0} f(t)\,dt$ et $\int_{0}^{\pi} f(t)\,dt$.

Exercice 1.

On considère l'équation différentielle linéaire (avec second membre)

$$y' = \tan(x)\,y + 1\ . \tag{1}$$

1. Rappeler quel est le domaine de définition de la fonction

$$x \mapsto \tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$$

   et en déterminer une primitive sur chaque intervalle de ce domaine de définition.

2. En déduire l'expression de toutes les solutions de l'équation différentielle linéaire homogène

$$y' = \tan(x)\,y\ . \tag{2}$$

   Déterminer la solution de cette équation qui vaut 2 en $x = 0$. Sur quel intervalle est définie cette solution ?

3. Déterminer une solution particulière de l'équation différentielle (1) puis donner toutes les solutions de cette équation. Quelle est la solution valant 0 en $x = 0$?

Exercice 2.

1. (a) Déterminer le rang du système

$$\begin{cases} x + 2y + z &= 0 \\ 2x + 4y + 3z &= 0 \\ x + 2y - z &= 0 \end{cases}$$

(b) A quelle condition sur le paramètre réel b le système

$$\begin{cases} x+2y+z &= 1 \\ 2x+4y+3z &= b+2 \\ x+2y-z &= -b+1 \end{cases}$$

a-t-il des solutions ?

2. Soit a un paramètre réel.

(a) Déterminer le rang du système

$$\begin{cases} x+2y+z &= 0 \\ 2x+(a+3)y+3z &= 0 \\ x+(-a+3)y+(a-2)z &= 0 \end{cases}$$

(b) Discuter suivant les valeurs des paramètres réels a et b les solutions du système

$$\begin{cases} x+2y+z &= 1 \\ 2x+(a+3)y+3z &= b+2 \\ x+(-a+3)y+(a-2)z &= -b+1 \end{cases}$$

Exercice 3. On considère l'application linéaire l de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$ donnée par la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

1. Etudions l'application l .

(a) Déterminer le rang de l . Donner l'image de l soit par une base soit par un système d'équations.

(b) Déterminer le noyau de l .

2. On introduit les vecteurs

$$\begin{aligned} f_1 &= 2e_1 + e_3 \\ f_2 &= e_1 - e_2 + e_3 \\ f_3 &= e_3 \end{aligned}$$

(a) Vérifier que le système des vecteurs $\{f_1, f_2, f_3\}$ est libre puis donner la matrice de passage P de la base canonique à cette nouvelle base.

(b) Soit B la matrice de l'application l dans la base $\{f_1, f_2, f_3\}$. Donner la relation entre B et A .

(c) Déterminer B .

Barême indicatif : Question de cours (4 points). Exercice 1 (4=1+1+2 points). Exercice 2 (5 = (1+1)+(1+2) points). Exercice 3 (7=(1+2)+(1+1+2) points).