Université Paris Diderot Paris 7 — **Département de Sciences Exactes**

Licence L1 (S2) — Algèbre et analyse élémentaires II

2015-2016 — MI2

(Un) Corrigé de l'examen (Session 1)

18 Mai 2016

Question de cours. Soit f une fonction continue sur l'intervalle $I =]\alpha, \beta[$ (α et β étant deux nombres réels). Soient a , b et c trois nombres réels appartenant à l'intervalle I . Enoncer la relation de Chasles.

Application. On prend $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) = \sin(x)$, $I = \mathbb{R}$, $a = -\pi$, $b = 0$ et $c = \pi$. Comparer $\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\, dt$, $\int_{-\pi}^{0} f(t)\, dt$ et $\int_{0}^{\pi} f(t)\, dt$.

Eléments de réponse.

La relation de Chasles est la suivante :

$$\forall a, b, c \in I =]\alpha, \beta[\ , \ \int_a^b f(t)\, dt + \int_b^c f(t)\, dt = \int_a^c f(t)\, dt\ .$$

Si $f(x) = \sin(x)$, alors $-\cos(x)$ est une primitive de f et

$$\forall a, b \in \mathbb{R}\ , \ \int_a^b \sin(t)\, dt = [-\cos(x)]_a^b = -\cos(b) + \cos(a)\ .$$

Aussi

$$\int_{-\pi}^{0} \sin(t)\, dt = -\cos(0) + \cos(-\pi) = -2 \text{ et } \int_0^{\pi} \sin(t)\, dt = -\cos(\pi) + \cos(0) = 2\ .$$

Par la relation de Chasles on sait donc que

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin(t)\, dt = 0\ .$$

Mais, directement, on a bien sûr :

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin(t)\, dt = -\cos(\pi) + \cos(-\pi) = -2 + 2 = 0\ .$$

Enfin on notera que, si l'on pose $u = -t$,

$$\int_{-a}^{0} \sin(t)\, dt = \int_{a}^{0} \sin(-u)\,(-1) du = -\int_0^a \sin(u)\, du$$

en exploitant l'imparité de la fonction $\sin(x)$. On a donc toujours

$$\int_{-a}^{a} \sin(t)\, dt = 0\ .$$

Exercice 1.
On considère l'équation différentielle linéaire (avec second membre)

$$y' = \tan(x)\, y + 1 \,. \tag{1}$$

1. Rappeler quel est le domaine de définition de la fonction

$$x \mapsto \tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$$

   et en déterminer une primitive sur les intervalles $]-\frac{\pi}{2}+k\pi, \frac{\pi}{2}+k\pi[$.
2. En déduire l'expression de toutes les solutions de l'équation différentielle linéaire homogène

$$y' = \tan(x)\, y \,. \tag{2}$$

   Déterminer la solution de cette équation qui vaut 2 en $x = 0$. Sur quel intervalle est définie cette solution ?
3. Déterminer une solution particulière de l'équation différentielle (1) puis donner toutes les solutions de cette équation. Quelle est la solution valant 0 en $x = 0$?

Eléments de réponse.

1. La fonction $x \mapsto \tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$ est définie lorsque le cosinus est non nul. Elle est donc définie sauf en les points $\frac{\pi}{2}+k\pi$ (où k est un nombre entier relatif). On a

$$\int \tan(t)\, dt = \int \frac{\sin(t)}{\cos(t)}\, dt = -\int \frac{d(\cos(t))}{\cos(t)} = -\ln|\cos(x)| + C \,.$$

2. Les solutions de l'équation différentielle linéaire homogène

$$y' = \tan(x)\, y \,. \tag{3}$$

   sont, d'après le cours, de la forme

$$C \exp(-\ln|\cos(x)|) = \frac{C}{|\cos(x)|}$$

   sur chaque intervalle $]-\frac{\pi}{2}+k\pi, \frac{\pi}{2}+k\pi[$. Cependant, sur chacun de ces intervalles, le cosinus garde un signe constant. Aussi, quitte à modifier la constante C , on peut aussi exprimer les solutions sous la forme

$$\frac{C}{\cos(x)}$$

La valeur 0 appartient à l'intervalle $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$. La solution sur cet intervalle qui vaut 2 en $x = 0$ doit vérifier

$$2 = \frac{C}{\cos(0)} \text{ soit } C = 2 \, .$$

Il s'agit donc de la fonction $\frac{2}{\cos(x)}$.

3. Pour déterminer une solution particulière de l'équation différentielle (1) on la cherche sous la forme

$$\frac{\lambda(x)}{\cos(x)}$$

(méthode dite de la variation de la constante). Ici, en remplaçant dans (1) ,

$$\frac{\lambda'(x)}{\cos(x)} + \frac{\lambda(x)\sin(x)}{\cos^2(x)} = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}\frac{\lambda(x)}{\cos(x)} + 1 \, .$$

Les termes en $\lambda(x)$ se simplifient et il reste

$$\frac{\lambda'(x)}{\cos(x)} = 1 \text{ soit } \lambda'(x) = \cos(x) \text{ et } \lambda(x) = \sin(x) \, .$$

D'après le cours, toutes les solutions de cette équation s'écrivent comme la somme de cette solution particulière et des solutions générales de l'équation homogène soit

$$\frac{\sin(x) + C}{\cos(x)} \, .$$

La solution valant 0 en $x = 0$ vérifie

$$0 = \frac{\sin(0) + C}{\cos(0)} \text{ soit } C = 0 \, .$$

Il s'agit donc de $\tan(x)$.

Exercice 2.

1. (a) Déterminer le rang du système

$$\begin{cases} x + 2y + z & = & 0 \\ 2x + 4y + 3z & = & 0 \\ x + 2y - z & = & 0 \end{cases}$$

(b) A quelle condition sur le paramètre réel b le système

$$\begin{cases} x + 2y + z & = & 1 \\ 2x + 4y + 3z & = & b + 2 \\ x + 2y - z & = & -b + 1 \end{cases}$$

a-t-il des solutions ?

2. Soit a un paramètre réel.

   (a) Déterminer le rang du système

$$\begin{cases} x+2y+z & = & 0 \\ 2x+(a+3)y+3z & = & 0 \\ x+(-a+3)y+(a-2)z & = & 0 \end{cases}$$

   (b) Discuter suivant les valeurs des paramètres réels a et b les solutions du système

$$\begin{cases} x+2y+z & = & 1 \\ 2x+(a+3)y+3z & = & b+2 \\ x+(-a+3)y+(a-2)z & = & -b+1 \end{cases}$$

Eléments de réponse.

1. (a) Pour déterminer le rang du système

$$\begin{cases} x+2y+z & = & 0 \\ 2x+4y+3z & = & 0 \\ x+2y-z & = & 0 \end{cases}$$

il nous suffit (par exemple) d'échelonner la matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 3 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix} .$$

Or on a

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 3 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix} \leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

en retranchant le bon multiple de la première ligne aux deux suivantes. Le rang du système est donc 2 .

   (b) Le système

$$\begin{cases} x+2y+z & = & 1 \\ 2x+4y+3z & = & b+2 \\ x+2y-z & = & -b+1 \end{cases}$$

aura des solutions si le vecteur colonne représenté par le second membre est combinaison linéaire des vecteurs colonnes de la matrice. Si l'on reprend l'échelonnement fait précédemment, cela donne

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 3 & b+2 \\ 1 & 2 & -1 & -b+1 \end{array}\right) \leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & b+2-2 \\ 0 & 0 & -2 & -b+1-1 \end{array}\right) \leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & 0 & b \end{array}\right) .$$

Soit $b \neq 0$ et le système ne peut avoir de solution (la dernière équation étant impossible), soit $b = 0$ et le système s'écrit

$$\begin{cases} x + 2y + z &= 1 \\ \quad z &= 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x &= 1 - 2y \\ z &= 0 \end{cases} .$$

Aussi le système admet-il des solutions si et seulement si $b = 0$.

2. Soit a un paramètre réel.

   (a) Opérons comme ci-dessus pour déterminer le rang du système

$$\begin{cases} x + 2y + z &= 0 \\ 2x + (a+3)y + 3z &= 0 \\ x + (-a+3)y + (a-2)z &= 0 \end{cases} .$$

   On a

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & a+3 & 3 \\ 1 & -a+3 & a-2 \end{pmatrix} \leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & a+3-4 & 3-2 \\ 0 & -a+3-2 & a-2-1 \end{pmatrix}$$

   soit

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & a+3 & 3 \\ 1 & -a+3 & a-2 \end{pmatrix} \leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & a-1 & 1 \\ 0 & -a+1 & a-3 \end{pmatrix} \leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & a-1 & 1 \\ 0 & 0 & a-2 \end{pmatrix} .$$

   Si $a \neq 1$ et $a \neq 2$, alors le système est de rang (maximal) 3 . Si $a = 1$ ou si $a = 2$, le système est de rang 2 .

   (b) Si $a \neq 1$ et $a \neq 2$, le système

$$\begin{cases} x + 2y + z &= 1 \\ 2x + (a+3)y + 3z &= b+2 \\ x + (-a+3)y + (a-2)z &= -b+1 \end{cases}$$

   est de rang 3 . Aussi il admet une solution unique quelque soit la valeur de b . Si $a = 1$, on retrouve le système étudié précédemment et on sait qu'il n'admet des solutions que si $b = 0$. Il reste donc à étudier le système obtenu pour $a = 2$. Soit

$$\begin{cases} x + 2y + z &= 1 \\ 2x + 5y + 3z &= b+2 \\ x + y &= -b+1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + 2y + z &= 1 \\ y + z &= b \\ -y - z &= -b \end{cases} .$$

   Comme les deux dernières équations sont identiques, on voit que ce système admet des solutions quelque soit la valeur de b .

   En conclusion, ce système admet des solutions si $a \neq 1$ (quelque soit alors la valeur de b) ainsi que si $a = 1$ et $b = 0$.

Exercice 3. On considère l'application linéaire l de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$ donnée par la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

1. Etudions l'application l .
   (a) Déterminer le rang de l . Donner l'image de l soit par une base soit par un système d'équations.
   (b) Déterminer le noyau de l .
2. On introduit les vecteurs

$$\begin{aligned} f_1 &= 2e_1 + e_3 \\ f_2 &= e_1 - e_2 + e_3 \\ f_3 &= e_3 \end{aligned}$$

   (a) Vérifier que le système des vecteurs $\{f_1, f_2, f_3\}$ est libre puis donner la matrice de passage P de la base canonique à cette nouvelle base.
   (b) Soit B la matrice de l'application l dans la base $\{f_1, f_2, f_3\}$. Donner la relation entre B et A .
   (c) Déterminer B .

Eléments de réponse.

1. Commençons par l'étude de l'application l .
   (a) Pour déterminer le rang de l , on peut échelonner la matrice A :

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix} \leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} .$$

   Bref le rang de l est 2 . On peut aussi travailler directement sur les vecteurs colonnes de la matrice (ce sont les vecteurs images des vecteurs de la base canonique). Or il s'agit de $e_1 + e_3$, e_1 et $-e_3$. C'est un système de rang 2 engendré qui plus est par les vecteurs e_1 et e_3 . Ainsi $\mathrm{Im}(l) =< e_1, e_3 >= \mathbb{R}e_1 \oplus \mathbb{R}e_3$. A noter que ce sous-espace vectoriel est défini également par l'équation $y = 0$.
   (b) Par le théorème du rang, on sait que le noyau de l sera de dimension $3 - \mathrm{rg}(l) = 3 - 2 = 1$. Il est par ailleurs donné par les solutions du système

$$\begin{cases} x + y &= 0 \\ \quad 0 &= 0 \\ x - z &= 0 \end{cases} \Leftrightarrow z = -y = x .$$

   Il s'agit donc de la droite engendrée par le vecteur $e_1 - e_2 + e_3$.

2. On introduit les vecteurs

$$\begin{aligned} f_1 &= 2e_1 + e_3 \\ f_2 &= e_1 - e_2 + e_3 \\ f_3 &= e_3 \end{aligned}$$

(a) Pour vérifier que le système des vecteurs $\{f_1, f_2, f_3\}$ est libre, on a plusieurs méthodes. On va opter ici pour exprimer l'ancienne en fonction de la nouvelle ce qui montrera que les f_i engendrent tout l'espace.

$$\begin{cases} f_1 &= 2e_1 + e_3 \\ f_2 &= e_1 - e_2 + e_3 \\ f_3 &= e_3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} e_3 &= f_3 \\ f_1 &= 2e_1 + f_3 \\ f_2 &= e_1 - e_2 + f_3 \end{cases}$$

ou encore

$$\begin{cases} f_1 &= 2e_1 + e_3 \\ f_2 &= e_1 - e_2 + e_3 \\ f_3 &= e_3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} e_3 &= f_3 \\ 2e_1 &= f_1 - f_3 \\ e_2 &= \frac{1}{2}f_1 - \frac{1}{2}f_3 - f_2 + f_3 \end{cases}$$

On a donc

$$\begin{aligned} e_1 &= \frac{1}{2}f_1 - \frac{1}{2}f_3 \\ e_2 &= \frac{1}{2}f_1 - f_2 + \frac{1}{2}f_3 \\ e_3 &= f_3 \end{aligned}$$

et notre système est bien générateur de $\mathbb{R}^3$.
Par définition la matrice de passage P de la base canonique à cette nouvelle base est donnée par

$$P = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} ;$$

à noter que notre vérification précédente donne P^{-1}

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix} .$$

(b) Soit B la matrice de l'application l dans la base $\{f_1, f_2, f_3\}$. D'après le cours, la relation entre B et A est

$$A = PBP^{-1} \text{ ou } B = P^{-1}AP .$$

(c) Pour déterminer B , on peut donc faire le calcul précédent (nous avons P et P^{-1}). Nous pouvons aussi revenir à la définition à savoir exprimer les images (par l) des vecteurs f_i dans la base qu'ils forment. Ainsi

$$l(f_1) = 2l(e_1) + l(e_3) = 2e_1 + 2e_3 - e_3 = 2e_1 + e_3 = f_1 ,$$

$f(f_2) = 0$ (puisque ce vecteur engendre le noyau de l) et

$$f(f_3) = l(e_3) = -e_3 = -f_3 .$$

Bref

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} .$$

On a donc l'identité

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix} .$$

Elle est facile à vérifier directement.