Université Paris Diderot Paris 7
Licence L1 (S2)
2015-2016

Département de Sciences Exactes
Algèbre et analyse élémentaires II
MI2 Groupe 4

Contrôle 2

Jeudi 14 avril 2016

Durée : 1 heure.
Tous les documents sont interdits, ainsi que les calculatrices et les téléphones portables.
Les exercices sont indépendants entre eux. Une attention particulière sera portée à la rédaction.

Question de cours. Soit f une fonction continue sur l'intervalle $[\alpha, \beta]$. Soient a et b des nombres réels tels que $\alpha < a < b < \beta$. Soit enfin F une primitive de f sur l'intervalle $[\alpha, \beta]$. Comparer F et $\int_a^b f(t)\, dt$.
A quoi est égal par définition $\int_b^a f(t)\, dt$? Calculer $\int_0^{-1} 1\, dt$ à titre d'exemple.

Exercice 1. On rappelle que $\cos(2x) = 1 - 2\sin^2(x)$.

1. Déterminer une primitive de la fonction $\sin^2(x)$. On précisera quel est son domaine de définition. En déduire
$$\int_0^\pi \sin^2(t)\, dt \ .$$
2. Calculer la primitive de la fonction $x\sin^2(x)$ (on pourra utiliser une intégration par parties). En déduire
$$\int_0^\pi t\sin^2(t)\, dt \ .$$

Exercice 2. On considère l'équation différentielle linéaire (avec second membre)

$$y' = \frac{2x}{1+x^2}\, y + 1 \ . \tag{1}$$

1. Déterminer une primitive de $\frac{2x}{1+x^2}$ (préciser son domaine de définition). En déduire l'expression des solutions de l'équation différentielle linéaire homogène $y' = \frac{2x}{1+x^2}\, y$. Donner la solution valant 1 en $x = 0$.
2. Déterminer une solution particulière de l'équation différentielle (1) puis donner toutes les solutions de cette équation. Donner la solution valant 0 en $x = 0$.

Barème indicatif : Question de cours : (4 points). Exercice 1 : (8=4+4 points). Exercice 2 : (8=4+4 points).