Université Paris Diderot Paris 7 Département de Sciences Exactes
Licence L1 (S2) Algèbre et analyse élémentaires II
2015-2016 MI2 Groupe 4

(Un) Corrigé du Contrôle 2

du 14 avril 2016

Question de cours. Soit f une fonction continue sur l'intervalle $[\alpha, \beta]$. Soient a et b des nombres réels tels que $\alpha < a < b < \beta$. Soit enfin F une primitive de f sur l'intervalle $[\alpha, \beta]$. Comparer F et $\int_a^b f(t)\,dt$.
A quoi est égal par définition $\int_b^a f(t)\,dt$? Calculer $\int_0^{-1} 1\,dt$ à titre d'exemple.

Eléments de réponse. On sait que $\int_a^x f(t)\,dt$ est une primitive de f sur I . C'est même la primitive de f s'annulant en $x = a$. Or deux primitives d'une même fonction diffèrent d'une constante. D'où

$$F(x) = \int_a^x f(t)\,dt + C$$

mais $F(a) = 0 + C$ d'où la relation

$$F(b) - F(a) = \int_a^b f(t)\,dt \ .$$

Par convention, si $b < a$, on a

$$\int_b^a f(t)\,dt = -\int_a^b f(t)\,dt \ .$$

D'où

$$\int_0^{-1} 1\,dt = -\int_{-1}^0 1\,dt = -\left[x\right]_{-1}^0 = -(0-(-1)) = -1 \ .$$

Exercice 1. On rappelle que $\cos(2x) = 1 - 2\sin^2(x)$.

1. Déterminer une primitive de la fonction $\sin^2(x)$. On précisera quel est son domaine de définition. En déduire
$$\int_0^\pi \sin^2(t)\,dt \ .$$
2. Calculer la primitive de la fonction $x\sin^2(x)$ (on pourra utiliser une intégration par parties). En déduire
$$\int_0^\pi t\sin^2(t)\,dt \ .$$

Eléments de réponse.

1. On a
$$\int \sin^2(t)\,dt = \frac{1}{2}\int (1-\cos(2t))\,dt = \frac{1}{2}\int 1\,dt - \frac{1}{2}\int \cos(2t)\,dt$$
soit
$$\int \sin^2(t)\,dt = \frac{x}{2} - \frac{1}{4}\sin(2x) + C\ .$$
La fonction dont on cherche la primitive est continue sur $\mathbb{R}$ tout entier. Ses primitives sont donc définies sur tout $\mathbb{R}$. On a donc
$$\int_0^\pi \sin^2(t)\,dt = \left[\frac{x}{2} - \frac{1}{4}\sin(2x)\right]_0^\pi = \frac{\pi}{2}\ .$$

2. Etudions $\int t\sin^2(t)\,dt$. On vient de déterminer une primitive de $\sin^2(x)$ et il est facile de dériver la fonction x . Aussi on peut utiliser la formule d'intégration par partie
$$\int u(t)v'(t)\,dt = u(x)v(x) - \int u'(t)v(t)\,dt$$
avec $u(t) = t$ et $v'(t) = \sin^2(t)$. D'où
$$\int t\sin^2(t)\,dt = x\left(\frac{x}{2} - \frac{1}{4}\sin(2x)\right) - \int 1\times\left(\frac{t}{2} - \frac{1}{4}\sin(2t)\right)\,dt$$
et finalement
$$\int t\sin^2(t)\,dt = \frac{x^2}{2} - \frac{x\sin(2x)}{4} - \frac{x^2}{4} - \frac{\cos(2x)}{8} + C = \frac{x^2}{4} - \frac{x\sin(2x)}{4} - \frac{\cos(2x)}{8} + C\ .$$
D'où
$$\int_0^\pi t\sin^2(t)\,dt = \left[\frac{x^2}{4} - \frac{x\sin(2x)}{4} - \frac{\cos(2x)}{8}\right]_0^\pi = \frac{\pi^2}{4} - \frac{1}{8} + \frac{1}{8} = \frac{\pi^2}{4}\ .$$

Exercice 2. On considère l'équation différentielle linéaire (avec second membre)
$$y' = \frac{2x}{1+x^2}\,y + 1\ . \tag{1}$$

1. Déterminer une primitive de $\frac{2x}{1+x^2}$ (préciser son domaine de définition). En déduire l'expression des solutions de l'équation différentielle linéaire homogène $y' = \frac{2x}{1+x^2}\,y$. Donner la solution valant 1 en $x = 0$.
2. Déterminer une solution particulière de l'équation différentielle (1) puis donner toutes les solutions de cette équation. Donner la solution valant 0 en $x = 0$.

Eléments de réponse.

1. On a
$$\int \frac{2t}{1+t^2}\,dt = \int \frac{du}{u}$$
où $u = 1+t^2$. D'où
$$\int \frac{2t}{1+t^2}\,dt = \int \frac{du}{u} = \ln|y| + C = \ln|1+x^2| + C = \ln(1+x^2) + C\ .$$

Soit

$$y' = \frac{2x}{1+x^2}\, y \tag{2}$$

l'équation linéaire homogène. D'après le cours, ses solutions générales sont les fonctions proportionnelles à la fonction

$$\exp\left(\int \frac{2t}{1+t^2}\, dt\right) = \exp\left(\ln\left(1+x^2\right)\right) = 1+x^2 \ .$$

L'ensemble des solutions de l'équation (2) est donc formé des fonctions $C(1+x^2)$ (où C est une constante réelle). Lorsque $x=0$, ces fonctions valent C . Donc la solution cherchée est $x \mapsto 1+x^2$.

On retrouve d'ailleurs facilement ce résultat en remarquant que (2) s'écrit

$$\int \frac{dy}{y} = \int \frac{2x}{1+x^2}\, dx \text{ soit } \ln(|y|) = \ln\left(1+x^2\right) + C \ .$$

2. Etudions maintenant l'équation (1) . On va chercher une solution particulière avec la méthode de la variation de la constante en posant donc $\varphi_0(x) = \psi(x)(1+x^2)$. On aura donc

$$\varphi_0'(x) = \frac{2x}{1+x^2}\, \varphi_0(x) + 1$$

soit

$$\psi'(x)(1+x^2) + 2x\psi(x) = \frac{2x}{1+x^2}\, \psi(x)(1+x^2) + 1$$

et

$$\psi'(x)(1+x^2) = 1 \text{ soit } \psi'(x) = \frac{1}{1+x^2} \text{ et } \psi(x) = \operatorname{Arctan}(x) \ .$$

Les solutions générales de l'équation (1) sont donc

$$C(1+x^2) + \operatorname{Arctan}(x)(1+x^2) \ .$$

Cette expression vaut C en $x=0$. Donc la solution cherchée est

$$x \mapsto \operatorname{Arctan}(x)(1+x^2) \ .$$