Université Paris Diderot Paris 7
Licence L1 (S2)
2016-2017

Département de Sciences Exactes
Algèbre et analyse élémentaires II
MI2 Groupe 3

Contrôle 2

Mardi 25 avril 2017

Durée : 1 heure 30.
Tous les documents sont interdits, ainsi que les calculatrices et les téléphones portables.
Les exercices sont indépendants entre eux. Une attention particulière sera portée à la rédaction.

Question de cours. Soit f une fonction continue sur l'intervalle $[a, b]$ $(a < b)$. Enoncer le théorème des valeurs intermédiaires pour la fonction f . L'appliquer à la fonction $\sin(x)$ sur l'intervalle $[0, \pi]$.

Exercice 1. On considère les deux polynômes $A = X^4+X^3-X-1$ et $B = X^4+X^3+2X^2+X+1$.

— Déterminer le plus grand commun diviseur de A et de B à l'aide de l'algorithme de Bezout.

— En déduire les racines réelles des deux polynômes A et B .

— Quelles sont les racines complexes de ces deux polynômes ?

Exercice 2. On posera $E = \mathbb{R}_3[X]$ (espace vectoriel des polynômes de degré au plus 3). Soit P un élément de E . On considère l'application φ qui, à P , associe le polynôme

$$Q = \varphi(P) = (X+1)P' - P$$

(où P' désigne le polynôme dérivé de P).

— Montrer que φ est un endomorphisme de E (application linéaire de E dans E).

— Déterminer la matrice de φ dans la base (canonique) des monômes de E .

— Déterminer tous les polynômes de degré au plus 1 qui vérifient $\varphi(P) = 0$. On notera Q_2 le polynôme de degré 1 dont le coefficient de degré 1 est 1 et qui vérifie $\varphi(Q_2) = 0$.

— En déduire le noyau de φ .

— On introduit $Q_1 = 1$, $Q_3 = X^2 + 2X + 1$ et $Q_4 = X^3 + 3X^2 + 3X + 1$. Vérifier que le système $\{Q_1, Q_2, Q_3, Q_4\}$ forme une base de E . Trouver la matrice de φ dans cette nouvelle base.

Exercice 3. On considère la fonction

$$f(x) = \begin{cases} x\ln(x) & \text{si} \quad x > 0 \\ 0 & \text{si} \quad x = 0 \end{cases} .$$

— Montrer que f est continue sur $[0, +\infty[$;

— Montrer que f est dérivable sur $]0, +\infty[$; quelle est la limite du rapport

$$\frac{f(x) - f(0)}{x}$$

lorsque x tend vers 0 par valeurs strictement supérieures ? Comment interpréter graphiquement ce dernier résultat ?

— Étudier les variations de f et tracer le graphe de f .

— En déduire les bornes sur l'intervalle $[0, 1]$ de la fonction $|f(x)|$.

Barème indicatif : Question de cours (4 points). Exercice 1 (5=3+1+1 points). Exercice 2 (6=1+1+1+1+2 points). Exercice 3 (5=1+1+2+1 points).