Université Paris Diderot Paris 7
Licence L1 (S2)
2016-2017

Département de Sciences Exactes
Algèbre et analyse élémentaires II
MI2 Groupe 3

(Un) Corrigé du Contrôle 2

Mardi 25 avril 2017

Question de cours. Soit f une fonction continue sur l'intervalle $[a, b]$ $(a < b)$. Enoncer le théorème des valeurs intermédiaires pour la fonction f . L'appliquer à la fonction $\sin(x)$ sur l'intervalle $[0, \pi]$.

Éléments de réponse. Une fonction continue prend toutes les valeurs comprises (au sens large) entre $f(a)$ et $f(b)$ (valeurs dites "intermédiaires"). Ainsi la fonction sin prend toutes les valeurs comprises entre 0 et 1 sur l'intervalle $[0, \pi/2]$ puis les valeurs comprises entre 1 et 0 sur l'intervalle $[\pi/2, \pi]$. Ainsi tous les réels de $[0, 1]$ sont atteints (en général deux fois).

Exercice 1. On considère les deux polynômes $A = X^4+X^3-X-1$ et $B = X^4+X^3+2X^2+X+1$.

- Déterminer le plus grand commun diviseur de A et de B à l'aide de l'algorithme de Bezout.
- En déduire les racines réelles des deux polynômes A et B .
- Quelles sont les racines complexes de ces deux polynômes ?

Éléments de réponse. Commençons par diviser le polynôme B par A :

$$B = X^4 + X^3 + 2X^2 + X + 1 = X^4 + X^3 - X - 1 + 2X^2 + 2X + 2 = A + 2(X^2 + X + 1)$$

puis

$$A = X^4 + X^3 - X - 1 = X^2(X^2 + X + 1) - X^2 - X - 1 = (X^2 - 1)(X^2 + X + 1) + 0 \ .$$

On en déduit que le polynôme $X^2 + X + 1$ (dernier reste non nul de l'algorithm) est un diviseur de A et de B qui est le plus "grand" (au sens où il admet le degré maximal).
La factorisation de A est donc $(X^2 - 1)(X^2 + X + 1)$. Celle de B s'en déduit :

$$B = A + 2(X^2 + X + 1) = (X^2 + 1)(X^2 + X + 1) \ .$$

On en déduit que B n'a aucune racine réelle et que A a -1 et 1 comme racines réelles simples. Sur $\mathbb{C}$, le polynôme $X^2 + X + 1$ a pour racines les deux racines troisièmes non réelles de l'unité. On les note en général j et $\bar{j}$ où $j = \exp\left(\frac{2i\pi}{3}\right)$. Alors A a pour racines sur $\mathbb{C}$ les nombres ± 1 et $\{j, j^2 = \bar{j}\}$. B a pour racines dans $\mathbb{C}$ les nombres $\pm i, j, j^2$.

Exercice 2. On posera $E = \mathbb{R}_3[X]$ (espace vectoriel des polynômes de degré au plus 3). Soit P un élément de E . On considère l'application φ qui, à P , associe le polynôme

$$Q = \varphi(P) = (X + 1)P' - P$$

(où P' désigne le polynôme dérivé de P).

- Montrer que φ est un endomorphisme de E (application linéaire de E dans E).

— Déterminer la matrice de φ dans la base (canonique) des monômes de E .

— Déterminer tous les polynômes de degré au plus 1 qui vérifient $\varphi(P) = 0$. On notera Q_2 le polynôme de degré 1 dont le coefficient de degré 1 est 1 et qui vérifie $\varphi(Q_2) = 0$.

— En déduire le noyau de φ .

— On introduit $Q_1 = 1$, $Q_3 = X^2 + 2X + 1$ et $Q_4 = X^3 + 3X^2 + 3X + 1$. Vérifier que le système $\{Q_1, Q_2, Q_3, Q_4\}$ forme une base de E . Trouver la matrice de φ dans cette nouvelle base.

Éléments de réponse.

— La dérivation des polynômes est une application linéaire. La multiplication par un polynôme fixe (ici $X + 1$) est aussi linéaire aussi φ est une application linéaire. En effet

$$\forall(\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2 \ ; \ \forall(P,Q) \in E^2 \varphi(\lambda P+\mu Q) = (X+1)X(\lambda P'+\mu Q')-(\lambda P+\mu Q) = \lambda\varphi(P)+\mu\varphi(Q) \ .$$

— On a $\varphi(1) = 0-1 = -1$, $\varphi(X) = (X+1)\times 1-X = 1$, $\varphi(X^2) = 2X(X+1)-X^2 = X^2+2X$ et $\varphi(X^3) = 3X^2(X+1) - X^3 = 2X^3 + 3X^2$. Soit la matrice

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} .$$

— Cherchons les polynômes $aX + b$ tels que $\varphi(aX + b) = 0$. On a

$$\varphi(aX + b) = 0 \Leftrightarrow a(X + 1) - aX - b = 0 \Leftrightarrow a - b = 0 \ .$$

Il s'agit donc des polynômes proportionnels à $X + 1$. Donc $Q_2 = X + 1$.

— On voit que, si P est de degré p au moins 2 , le degré de $\varphi(P)$ est celui de P car le coefficient de plus haut degré de $\varphi(P)$ est $pa_p - a_p = (p - 1)a_p$. Donc $\varphi(P)$ ne peut alors s'annuler. Bref le noyau de φ est formé de polynômes de degré au plus 1 . Il s'agit donc de la droite $\mathbb{R}(X + 1)$.

— On voit que $Q_i = (X + 1)^{i-1}$ pour $1 \leq i \leq 4$. Alors

$$\varphi(Q_i) = (X + 1) \times (i - 1)(X + 1)^{i-2} - (X + 1)^{i-1} = (i - 2)(X + 1)^{i-1}$$

(pour $i \geq 2$). Si $i = 1$, on a $\varphi(1) = -1$. Aussi cette (nouvelle) matrice) est

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} .$$

Elle est diagonale.

On en déduit que

$$\forall n \geq 1 \ \varphi^n(a_0+a_1(X+1)+a_2(X+1)^2+a_3(X+1)^3) = (-1)^n a_0+a_2(X+1)^2+2^n a_3(X+1)^3 \ .$$

Exercice 3. On considère la fonction

$$f(x) = \begin{cases} x\ln(x) & \text{si} \quad x > 0 \\ 0 & \text{si} \quad x = 0 \end{cases} .$$

— Montrer que f est continue sur $[0, +\infty]$;

— Montrer que f est dérivable sur $]0, +\infty]$; quelle est la limite du rapport

$$\frac{f(x) - f(0)}{x}$$

lorsque x tend vers 0 par valeurs strictement supérieures ? Comment interprèter graphiquement ce dernier résultat ?

— Étudier les variations de f et tracer le graphe de f .

— En déduire les bornes sur l'intervalle $[0, 1]$ de la fonction $|f(x)|$.

Éléments de réponse.

— La fonction $\ln(x)$ est continue sur $]0, +\infty[$ aussi f est-elle aussi continue sur cet intervalle. Reste à étudier la limite de $f(x)$ lorsque x tend vers 0 par valeur supérieure. On sait que $x \ln(x)$ tend alors vers 0 (toute puissance -positive- de x "l'emporte sur le logarithme"). Aussi f est continue à droite en 0 .

— La fonction f est dérivable sur $]0, +\infty]$ d'après les théorèmes sur les opérations sur les nombres dérivés. Par ailleurs

$$\frac{f(x) - f(0)}{x} = \frac{x \ln(x)}{x} = \ln(x)$$

tend vers $-\infty$ si x tend vers 0^+ .Le graphe de la fonction f admet donc une demi-tangente verticale en $(0, 0)$.

— On sait que

$$\text{si } x > 0 \ f'(x) = \ln(x) + x\frac{1}{x} = 1 + \ln(x) \ .$$

Ainsi $f'(x)$ est négative sur $]0, 1/e[$ et positive sur $]1/e, +\infty[$. Donc f décroit de 0 à $1/e$ puis croit de $1/e$ à $+\infty$ (en passant par 0 en 1).

— On voit que

$$\forall x \in [0, 1] \ f(1/e) \leq f(x) \leq 0 \text{ et } |f(x)| \leq |f(1/e)| = 1/e \ .$$