

## 0.1 Question de cours

a. Parmi les ensembles suivant désigner ceux qui sont des espaces vectoriels :

$$E_1 = \{(x, y) | x + 5y = 3\}$$

$$E_2 = \{(x, y, z) | 3x + 2y + 4z = 0\}$$

b. Soit  $E$  un espace vectoriel de dimension  $n$ .

Quel est le cardinal minimum d'une famille génératrice de  $E$  ?

Quel est le cardinal maximum d'une famille libre de  $E$  ?

Que peut-on dire du cardinal d'une base de  $E$  ?

Montrer que  $(1, 0, 1), (0, 1, 1), (0, 0, 1)$  est une base de  $\mathbb{R}^3$ .

## 0.2 Exercice 1 :

Soit le sous-ensemble  $F$  de  $\mathbb{R}^4$  défini par :

$$\begin{cases} x + y + 3z + t = 0 \\ x + 2y + 4z + t = 0 \\ 3y + z + t = 0 \end{cases} \quad (1)$$

1. Rappeler pourquoi  $F$  est un espace vectoriel.
2. Quelle est la dimension de  $F$  ?
3. Donner une base de  $F$ .
4. Donner un sous-espace vectoriel supplémentaire de  $F$  dans  $\mathbb{R}^3$ .

## 0.3 Exercice 2 :

Soit  $\mathbb{R}_3[X]$  l'espace des polynômes de degrés inférieure ou égal à 3.

1. Montrer que  $P_1(X) = X + X^2$  et  $P_2(X) = X$  sont des vecteurs libres de  $\mathbb{R}_3[X]$ .
2. Soit  $F$  le sous-espace vectoriel qu'ils engendrent. Quelle est sa dimension ?
3. Soit  $P_3(X) = X^3, P_4(X) = 1 + X$ . Montrer que  $P_1, P_2, P_3, P_4$  est une base de  $\mathbb{R}_3[X]$ .
4. Quels sont les coordonnées du vecteur  $X^2$  dans cette base ?
5. Donner un sous-espace vectoriel supplémentaire de  $F$  dans  $\mathbb{R}_3[X]$ .