

## Contrôle 1

Lundi 22 février 2016

---

*Durée : 1 heure.*

*Tous les documents sont interdits, ainsi que les calculatrices et les téléphones portables.  
Les exercices sont indépendants entre eux. Une attention particulière sera portée à la rédaction.*

---

**Question de cours.** Soit  $E$  un espace vectoriel réel de dimension  $n$ . Définir la notion de sous-espace vectoriel de  $E$ . Quelle propriété est vérifiée par la dimension d'un sous-espace vectoriel de  $E$ ?

L'ensemble des vecteurs  $(x, y, z, t)$  de  $\mathbb{R}^4$  vérifiant  $x - y + z = t$  est-il un sous-espace vectoriel de  $\mathbb{R}^4$ ? Même question pour l'ensemble  $(x, y, z, t)$  de  $\mathbb{R}^4$  vérifiant  $x + y + z = t + 1$ .

Donner un exemple de sous-espace vectoriel non trivial de l'espace  $\mathcal{C}(\mathbb{R}; \mathbb{R})$  des fonctions continues de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$ .

**Exercice 1.** Soit  $E = \mathbb{R}^4$ . Soit  $F$  le sous-espace vectoriel de  $E$  engendré par les vecteurs  $u_1 = (-1, 1, 0, -1)$ ,  $u_2 = (1, 1, 1, 1)$  et  $u_3 = (3, 1, 2, 3)$ . Soit  $G$  le sous-espace vectoriel engendré par les vecteurs  $v_1 = (1, 0, 1, 0)$  et  $v_2 = (0, 1, 0, 1)$ .

- Quelle est la dimension de  $F$ ? Donner  $F$  par un système d'équations.
- Mêmes questions pour  $G$ .
- Est-ce que  $F$  et  $G$  sont supplémentaires dans  $E$ ?

**Exercice 2.** Soit  $E = \mathbb{R}^5$ . On se donne le sous-ensemble  $F$  de  $E$  défini par

$$F = \left\{ (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) ; \begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 - x_4 + x_5 & = & 0 \\ x_1 - x_3 + x_4 + x_5 & = & 0 \\ x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 3x_4 + x_5 & = & 0 \end{cases} \right\} .$$

- Rappeler pourquoi  $F$  est un sous-espace vectoriel de  $E$ .
- Donner un système de vecteurs générateurs de  $F$  et une base de ce sous-espace vectoriel.
- Donner la dimension de  $F$ .
- Donner un sous-espace vectoriel supplémentaire de  $F$  dans  $\mathbb{R}^5$ .

**Barème indicatif : Question de cours (4 points). Exercice 1 (8=3+3+2 points). Exercice 2 (8=2+3+1+2 points).**