

Contrôle 1

Mardi 7 février 2016

Durée : 1 heure.

*Tous les documents sont interdits, ainsi que les calculatrices et les téléphones portables.
Les exercices sont indépendants entre eux. Une attention particulière sera portée à la rédaction.*

Question de cours. Soit F un sous-espace vectoriel réel de \mathbb{R}^n . Qu'est-ce qu'un système générateur de F ? En donner un exemple où F est un sous-espace vectoriel non réduit à $\{0\}$ et distinct de \mathbb{R}^n .

Exercice 1. Soient (x, y, z, t) des variables réelles.

— Résoudre le système suivant :

$$\begin{cases} x + y - z + t = 0 \\ x - y - z = 0 \\ 2y + t = 0 \end{cases} ;$$

— Résoudre le système suivant :

$$\begin{cases} x + y - z + t = 1 \\ x - y - z = 1 \\ 2y + t = m \end{cases} .$$

On discutera suivant la valeur du paramètre réel m .

On considère les quatre vecteurs $u_1 = (1, 1, 0)$, $u_2 = (1, -1, 2)$, $u_3 = (-1, -1, 0)$ et $u_4 = (1, 0, 1)$ et on note F le sous-espace vectoriel de \mathbb{R}^3 qu'ils engendrent.

- Extraire du système $\{u_1, u_2, u_3, u_4\}$ un système libre qui reste générateur de F ;
- Donner une base de F ;
- Quelle est la dimension de F ?
- A quelle condition portant sur x, y, z le vecteur $u = (x, y, z)$ appartient-il à F ?

Exercice 2. On considère le sous-espace vectoriel F de \mathbb{R}^4 engendré par les 5 vecteurs suivants : $u_1 = (1, 1, 1, -3)$, $u_2 = (1, -1, 0, 0)$, $u_3 = (0, 1, -1, 0)$, $u_4 = (0, 0, 1, -1)$ et $u_5 = (1, 0, 0, -1)$.

- Déterminer toutes les combinaisons linéaires nulles possibles de ces cinq vecteurs.
- En déduire une base de F .
- Soit G le sous-espace vectoriel engendré par les vecteurs $\{u_2, u_3, u_4\}$. Le comparer à F (lui est-il contenu? le contient-il?).
- Montrer que le vecteur e_1 de la base canonique de \mathbb{R}^4 n'appartient pas à F . En déduire une base de \mathbb{R}^4 contenant une base de F .
- Comparer F au sous-espace vectoriel de \mathbb{R}^4 défini par $H = \{(x, y, z, t) ; x + y + z + t = 0\}$.

Barème indicatif : Question de cours (2 points). Exercice 1 (8=2+2+2+0,5+0,5+1 points). Exercice 2 (10=2+2+2+2+2 points).