Université Paris Diderot Paris 7 | Département de Sciences Exactes
Licence L1 (S2) | Algèbre et analyse élémentaires II
2016-2017 | MI2 Groupe 3

# (Un) Corrigé du contrôle 1
## du Mardi 7 février 2016

**Question de cours.** Soit $F$ un sous-espace vectoriel réel de $\mathbb{R}^n$ . Qu'est-ce qu'un système générateur de $F$ ? En donner un exemple où $F$ est un sous-espace vectoriel non réduit à $\{0\}$ et distinct de $\mathbb{R}^n$ .

**Éléments de réponse**. Le système des vecteurs $\{u_1, \ldots, u_m\}$ engendre $F$ (est un système générateur de $F$) si et seulement si tout vecteur $u$ de $F$ s'écrit comme une combinaison linéaire des vecteurs $u_i$ :

$$u = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i u_i \ ; \ \lambda_1, \ldots, \lambda_m \in \mathbb{R} \ .$$

Le vecteur $(1, 1)$ de $\mathbb{R}^2$ engendre la droite vectorielle formée des vecteurs $(\lambda, \lambda); \lambda \in \mathbb{R}$ (première bissectrice). Les vecteurs $e_1 - e_2$ , $e_2 - e_3$ et $e_3 - e_1$ engendrent le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ formé des vecteurs $u = (x, y, z); x + y + z = 0$ (plan vectoriel dans $\mathbb{R}^3$).

**Exercice 1.** — Résoudre le système suivant :

$$\begin{cases} x + y - z + t &= 0 \\ x - y - z &= 0 \\ 2y + t &= 0 \end{cases} ;$$

— Résoudre le système suivant :

$$\begin{cases} x + y - z + t &= 1 \\ x - y - z &= 1 \\ 2y + t &= m \end{cases} .$$

On discutera suivant la valeur du paramètre réel $m$ .

On considère les quatre vecteurs $u_1 = (1, 1, 0)$ , $u_2 = (1, -1, 2)$ , $u_3 = (-1, -1, 0)$ et $u_4 = (1, 0, 1)$ et on note $F$ le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ qu'ils engendrent.

— Extraire du système $\{u_1, u_2, u_3, u_4\}$ un système libre qui reste générateur de $F$ ;

— Donner une base de $F$ ;

— Quelle est la dimension de $F$ ?

— A quelle condition portant sur $x, y, z$ le vecteur $u = (x, y, z)$ appartient-il à $F$ ?

**Éléments de réponse**.

— On a

$$\begin{cases} x + y - z + t &= 0 \\ x - y - z &= 0 \\ 2y + t &= 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} .$$

Il nous suffit donc d'échelonner la matrice ainsi mise en évidence :

$$\begin{pmatrix}1 & 1 & -1 & 1\\ 1 & -1 & -1 & 0\\ 0 & 2 & 0 & 1\end{pmatrix} \leftrightarrow \begin{pmatrix}1 & 1 & -1 & 1\\ 0 & -2 & 0 & -1\\ 0 & 2 & 0 & 1\end{pmatrix} \leftrightarrow \begin{pmatrix}1 & 1 & -1 & 1\\ 0 & 2 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix} .$$

ce système homogène (de 3 équations à 4 inconnues) est de rang 2 . Il admet donc une infinité de solutions à 2 paramètres. On a

$$\begin{cases} x+y-z+t &= 0\\ x-y-z &= 0\\ 2y+t &= 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y-z+t &= 0\\ 2y+t &= 0\end{cases}$$

soit $t=-2y$ et $z=x+y+t=x-y$ . Bref les solutions sont $(x,y,x-y,-2y)$ (pour $x$ et $y$ paramètres réels).

— On a de même

$$\begin{cases} x+y-z+t &= 1\\ x-y-z &= 1\\ 2y+t &= m\end{cases} \Leftrightarrow \begin{pmatrix}1 & 1 & -1 & 1\\ 1 & -1 & -1 & 0\\ 0 & 2 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\\ t\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\ 1\\ m\end{pmatrix} .$$

Il sous suffit d'échelonner la matrice

$$\left(\begin{array}{cccc|c}1 & 1 & -1 & 1 & 1\\ 1 & -1 & -1 & 0 & 1\\ 0 & 2 & 0 & 1 & m\end{array}\right) \leftrightarrow \left(\begin{array}{cccc|c}1 & 1 & -1 & 1 & 1\\ 0 & -2 & 0 & -1 & 0\\ 0 & 2 & 0 & 1 & m\end{array}\right) \leftrightarrow \left(\begin{array}{cccc|c}1 & 1 & -1 & 1 & 1\\ 0 & 2 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & m\end{array}\right) .$$

Ainsi, soit $m \neq 0$, et le système d'admet aucune solution. Soit $m=0$ et le système admet une infinité de solutions à deux paramètres. On a

$$\begin{cases} x+y-z+t &= 1\\ x-y-z &= 1\\ 2y+t &= m\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y-z+t &= 1\\ 2y+t &= 0\end{cases}$$

soit $t=-2y$ et $z=-1+x+y+t=1+x-y$ . Bref les solutions sont $(x,y,-1+x-y,-2y)$ (toujours pour $x$ et $y$ paramètres réels).

— Etudions $F$ . Nous avons deux méthodes pour trouver un système libre engendrant $F$ . Utiliser le théorème de la base incomplète en extrayant du système de générateurs un système de vecteurs libres ou bien étudier toutes les combinaisons linéaires nulles des vecteurs de départ.

Première méthode. Chacun des 4 vecteurs engendrant $F$ est non nul. Chacun peut être pris comme premier vecteur d'un système libre. Prenons par exemple $u_1$ (il comporte une composante nulle). Tous les vecteurs multiples de $u_1$ ont nécessairement leur dernière composante nulle. Aussi les vecteurs $u_2$ et $u_4$ ne peuvent lui être multiples. Prenons alors $u_2$ pour compléter $u_1$ . Le système $\{u_1, u_2\}$ est libre et contenu dans $F$ . Il est immédiat de constater que $u_3 = -u_1$ . Il reste donc à étudier si $u_4$ est combinaison linéaire ou non des vecteurs $u_1$ et $_2$ . Ce qui revient à échelonner une matrice extraite de la précédente (formée des deux premières colonnes et de la quatrième) :

$$\begin{cases} x+y &= 1\\ x-y &= 0\\ 2y &= 1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & -1\\ 0 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\ 0\\ 1\end{pmatrix} .$$

Il nous suffit donc de reprendre les calculs déjà effectués :

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{array}\right) \leftrightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \end{array}\right) \leftrightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right) .$$

On voit donc que le vecteur $u_4$ est combinaison linéaire des vecteurs $\{u_1, u_2\}$ (le système ayant des solutions). Ainsi $\{u_1, u_2\}$ est libre et il engendre $F$ puisque $u_3 = -u_1$ et $u_4$ est combinaison linéaire des vecteurs $\{u_1, u_2\}$ .
Seconde méthode. Cherchons toutes les combinaisons linéaires des vecteurs engendrant $F$ : elles sont données par les solutions trouvées à la première question à savoir $(x, y, x-y, -2y)$ .
Ainsi on sait que

$$u_1 + u_3 = 0 \text{ et } u_2 - u_3 - 2u_4 = 0 .$$

La première est obtenue pour $x = 1$ et $y = 0$ . La seconde pour $x = 0$ et $y = 1$ . On peut aussi écrire que

$$(x, y, x - y, -2y) = x(1, 0, 1, 0) + y(0, 1, -1, -2) .$$

Ainsi $u_3$ s'exprime en fonction de $u_1$ ($u_1 + u_3 = 0$) et $u_4$ en fonction de $u_1$ et $u_2$ ($u_2 - u_3 - 2u_4 = 0$).

- Le système $\{u_1, u_2\}$ est libre et générateur. Il forme une base de $F$ .
- Son cardinal est 2 donc $\mathrm{Dim}(F) = 2$ .
- Il nous suffit d'étudier le système

$$\left\{\begin{array}{rcl} \lambda + \mu & = & x \\ \lambda - \mu & = & y \\ 2\mu & = & z \end{array}\right. \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda \\ \mu \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

soit

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & x \\ 1 & -1 & y \\ 0 & 2 & z \end{array}\right) \leftrightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & x \\ 0 & -2 & y - x \\ 0 & 2 & z \end{array}\right) \leftrightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & x \\ 0 & 2 & x - y \\ 0 & 0 & z + y - x \end{array}\right) .$$

Ce système n'admet de solutions en $\lambda$ et $\mu$ que si $x - y - z = 0$ . Ainsi

$$F = \{u = (x, y, z) \; ; x - y - z = 0\} .$$

Il s'agit d'un hyperplan de $\mathbb{R}^3$ (donc un plan vectoriel).

**Exercice 2.** On considère le sous-espace vectoriel $F$ de $\mathbb{R}^4$ engendré par les 5 vecteurs suivants : $u_1 = (1, 1, 1, -3)$ , $u_2 = (1, -1, 0, 0)$ , $u_3 = (0, 1, -1, 0)$ , $u_4 = (0, 0, 1, -1)$ et $u_5 = (1, 0, 0, -1)$ .

- Déterminer toutes les combinaisons linéaires nulles possibles de ces cinq vecteurs.
- En déduire une base de $F$ .
- Soit $G$ le sous-espace vectoriel engendré par les vecteurs $\{u_2, u_3, u_4\}$ . Le comparer à $F$ (lui est-il contenu ? le contient-il ?).
- Montrer que le vecteur $e_1$ de la base canonique de $\mathbb{R}^4$ n'appartient pas à $F$ . En déduire une base de $\mathbb{R}^4$ contenant une base de $F$ .
- Comparer $F$ au sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$ défini par $H = \{(x, y, z, t) \; ; x + y + z + t = 0\}$ .

**Éléments de réponse**. On considère le sous-espace vectoriel $F$ de $\mathbb{R}^4$ engendré par les 5 vecteurs suivants : $u_1 = (1, 1, 1, -3)$ , $u_2 = (1, -1, 0, 0)$ , $u_3 = (0, 1, -1, 0)$ , $u_4 = (0, 0, 1, -1)$ et $u_5 = (1, 0, 0, -1)$ .

— Cherchons toutes les combinaisons linéaires des vecteurs engendrant $F$ en échelonnant la matrice suivante

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ -3 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 \end{array}\right) \leftrightarrow \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & -1 & 2 & 0 \end{array}\right)$$

soit

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & -1 & 2 & 0 \end{array}\right) \leftrightarrow \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 2 & -1 & 0 \end{array}\right) .$$

Les deux dernières lignes sont proportionnelles. Ainsi le rang obtenu est 3 . Donc la dimension de $F$ est 3 . Toutes les combinaisons linéaires nulles sont obtenues en résolvant le système

$$\begin{cases} x+y+u & = 0 \\ y+z-t+u & = 0 \\ 3z-2t+u & = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u & = -3z+2t \\ y & = -z+t-u \\ x & = -y-u \end{cases}$$

soit

$$\begin{cases} x & = z-t \\ y & = 2z-t \\ u & = -3z+2t \end{cases} .$$

Ces combinaisons linéaires s'écrivent donc

$$(z-t, 2z-t, z, t, -3z+2t) = z(1,2,1,0,-3) + t(-1,-1,0,1,2)$$

d'où les relations

$$u_1 + 2u_2 + u_3 - 3u_5 = 0 \text{ et } -u_1 - u_2 + u_4 + 2u_5 = 0 .$$

Ainsi les vecteurs $u_3$ et $u_4$ s'expriment en fonction des vecteurs $u_1,\ u_2$ et $u_5$ .

— D'après ce qui précède, une base de $F$ est donnée par $\{u_1, u_2, u_5\}$ (par exemple).

On aurait pu aussi raisonner comme suit. Tous les vecteurs engendrant $F$ sont non nuls donc peuvent constituer un premier élément d'un système libre. Prenons $u_2$ . Toutes les combinaisons linéaires de ce vecteur ont les deux dernières composantes nulles. Tous les autres vecteurs ne sont donc pas multiples de $u_2$ . Nous pouvons adjoindre à $u_2$ n'importe quel vecteur. Prenons $u_3$ . Toutes les combinaisons linéaires de ces deux vecteurs ont une dernière composante nulle. Les trois vecteurs restants ne peuvent donc être combinaison linéaire de $\{u_2, u_3\}$ . Donc le système $\{u_2, u_3, u_4\}$ (par exemple) est libre. Mais on a $u_2 + u_3 + u_4 = (1, -1+1, -1+1, -1) = u_5$ . Donc $u_5$ est engendré par ce système. Enfin $u_1 = u_2 + 2u_3 + 3u_4$ . Donc $F$ est engendré par le système (libre) $\{u_2, u_3, u_4\}$ .

— Soit $G$ le sous-espace vectoriel engendré par les vecteurs $\{u_2, u_3, u_4\}$ . D'après ce qui précède, $G$ a pour système générateur une base de $F$ . Donc tous les vecteurs de $F$ sont éléments de $G$ ($F \subset G$). Mais $G$ est engendré par des vecteurs de $F$ donc $G \subset F$ et $F = G$ .

— Soit on vérifie que le vecteur $e_1$ de la base canonique de $\mathbb{R}^4$ n'est pas combinaison linéaire d'une base de $F$ . Soit on trouve une équation de $F$ (puisque $F$ est de dimension 3 donc de co-dimension 1) et on vérifie que $e_1$ ne la vérifie pas. Pour cela on peut reprendre l'échelonnement

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & x \\ 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & y \\ 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & z \\ -3 & 0 & 0 & -1 & -1 & t \end{array}\right) \leftrightarrow \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & x \\ 0 & -2 & 1 & 0 & -1 & y-x \\ 0 & -1 & -1 & 1 & -1 & z-x \\ 0 & 3 & 0 & -1 & 2 & t+3x \end{array}\right)$$

soit

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & x \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 1 & x-z \\ 0 & -2 & 1 & 0 & -1 & y-x \\ 0 & 3 & 0 & -1 & 2 & t+3x \end{array}\right) \leftrightarrow \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & x \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 1 & x-z \\ 0 & 0 & 3 & -2 & 1 & x+y-2z \\ 0 & 0 & -3 & 2 & -1 & 3z+t \end{array}\right).$$

Soit la condition $x+y-2z+3z+t=0$ ou encore $x+y+z+t=0$ . Or $e_1$ ne vérifie pas cette équation. Donc $\{u_2, u_3, u_4, e_1\}$ est une base de $\mathbb{R}^4$ contenant une base de $F$ .

**Remarque**. On aurait pu se contenter de montrer que le système

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ -3 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 \end{array}\right)$$

est impossible.

— Chaque vecteur $u_i$ vérifie l'identité $x+y+z+t=0$ . Donc $F$ est contenu dans $H$ . Avec la théorie de la dimension ($H$ est de co-dimension 1 dans $\mathbb{R}^4$ donc de dimension 3 soit celle de $F$), on sait que $F=H$ . Mais on peut aussi vérifier que

$$u=(x,y,z,t)\in H \Leftrightarrow u=(x,y,z,-x-y-t)=x(1,-1,0,0)+y(0,1,0,-1)+z(0,0,1,-1)$$

soit

$$u=(x,y,z,t)\in H \Leftrightarrow u=xu_2+y(u_3+u_4)+zu_4\in F\ .$$

Ainsi $H$ et $F$ sont contenus l'un dans l'autre et sont égaux.