Algèbre et Analyse II

L'épreuve dure 1h.

Les exercices sont indépendants. Les réponses doivent être justifiées par des références au cours ou par des arguments précis. Il est demandé d'utiliser les méthodes vues en cours et en TD.
Les documents, téléphones et calculatrices ne sont pas autorisés.

Exercice 1 (Questions de cours)

1. *Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel et $\{u, v, w\}$ une famille de vecteurs de E.*
   Donner la définition de $\{u, v, w\}$ est une famille de vecteurs libres dans E.
2. *Soient E_1 et E_2 deux sous espaces vectoriels d'un espace vectoriel E. Définir $E_1 \oplus E_2 = E$.*

Exercice 2 *Soient $u := (1, -1, 1)$, $v := (0, -1, 2)$ et $w := (1, -2, 3)$ dans $\mathbb{R}^3$.*

1. *Montrer que la famille $\{u, v, w\}$ est liée et donner une relation linéaire entre ces vecteurs.*
2. *Soit $F :=< u, v, w >$. Donner une base de F. Quelle est la dimension de F ?*
3. *Soit $G := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | x + 2y + z = 0\}$.*
   (a) *Monter que G est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.*
   (b) *Donner une base de G. Quelle est la dimension de G ?*
4. *Monter que $F = G$.*

Exercice 3 *Dans $\mathbb{R}^3$, on considère les sous-espaces vectoriels $E_1 :=< u_1, u_2 >$ et $E_2 :=< v_1, v_2 >$ avec $u_1 := (2, 1, 1)$, $u_2 := (2, 2, 1)$, $v_1 := (1, 2, -1)$, et $v_2 := (2, 1, 2)$.*

1. *Donner une base de E_1 et de E_2 ainsi que les dimensions de ces sous-espaces vectoriels.*
2. *Déterminer la dimension de $E_1 \cap E_2$ et de $E_1 + E_2$.*
3. *A-t-on : $\mathbb{R}^3 = E_1 + E_2$? $\mathbb{R}^3 = E_1 \oplus E_2$?*

Exercice 4 *On considère le $\mathbb{R}$-espace vectoriel E des fonctions réelles définies sur $\mathbb{R}$ et doublement dérivable. On pose*

$$H := \{f \in E | f'' + 2f' + f = \mathcal{O}\}$$

où $\mathcal{O}$ est la fonction nulle. (C'est-à-dire que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\mathcal{O}(x) = 0$.) Montrer que H est un sous-espace vectoriel de E.