Université Paris-Diderot – L2 d'informatique 2012-2013
Algèbre et Analyse élémentaires II (MI2)

Partiel du 2 mars 2013

Durée : 3 heures

Sans documents, à l'exception d'une feuille A4 recto-verso manuscrite.

Les quatre exercices sont indépendants.

Exercice 1 (Un système à paramètre)

Soit $a \in \mathbb{R}$. Mettre le système suivant sous forme matricielle puis déterminer l'ensemble de ses solutions dans $\mathbb{R}^3$. On discutera suivant la valeur du paramètre a.

$$\begin{cases} (1+a)x + y + z = 0 \\ x + (1+a)y + z = 0 \\ x + y + (1+a)z = 0 \end{cases}$$

Exercice 2 (Trace et déterminant pour les matrices 2x2.)
On se place dans l'espace vectoriel $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ des matrices réelles 2×2.

Pour toute matrice $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ on pose : $\det A = ad - bc$ et $\mathrm{tr}(A) = a + d$.

1. Montrer que pour tout $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, pour tout $B \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, on a $\det AB = \det A \times \det B$.

2. Soit $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ telle que $M^3 = \mathrm{I}_2$. Montrer que $\det(M) = 1$.

3. Soit $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. Montrer que $M^2 - \mathrm{tr}(M)M + \det(M)\,\mathrm{I}_2 = 0$.

4. On suppose dorénavant que $M^3 = \mathrm{I}_2$.

a. Montrer que $\big(\mathrm{tr}(M)^2 - 1\big)M = \big(\mathrm{tr}(M) + 1\big)\mathrm{I}_2$

b. Montrer que si $\mathrm{tr}(M) \neq -1$, alors $M = \mathrm{I}_2$.

c. Montrer que l'ensemble des matrices de $M(2, \mathbb{R})$ telles que $M^3 = \mathrm{I}_2$ est formé de la matrice identité et de l'ensemble des matrices de déterminant 1 et de trace -1.

Exercice 3 (Fonctions paires et impaires.)

On considère E l'espace vectoriel des fonctions réelles (de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$).
Soit $\mathcal{P}$ l'ensemble des fonctions réelles paires : $\mathcal{P} = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid \forall x \in \mathbb{R}, f(-x) = f(x)\}$.
Soit $\mathcal{I}$ l'ensemble des fonctions réelles impaires : $\mathcal{I} = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid \forall x \in \mathbb{R}, f(-x) = -f(x)\}$.

1. Montrer que $\mathcal{P}$ et $\mathcal{I}$ sont des sous-espaces vectoriels de E.

2. Soit $f \in E$. Trouver deux fonctions $g \in \mathcal{P}$ et $h \in \mathcal{I}$ telles que $f = g + h$. En déduire que $E = \mathcal{P} + \mathcal{I}$.

3. Montrer que $E = \mathcal{P} \oplus \mathcal{I}$.

4. On considère les fonctions $s(x) = \sin x$ et $p(x) = 3x^3 - 2x^2 + 1$

a. Montrer que ces deux fonctions forment une famille libre de E.

b. Donner la décomposition de chacune de ces deux fonctions suivant la somme directe $E = \mathcal{P} \oplus \mathcal{I}$.

5. On considère l'application $\Phi : E \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $\Phi(f) = f(0)$.

a. Montrer que Φ est linéaire.

b. Montrer que $\mathcal{I} \subset \mathrm{Ker}(\Phi)$.

c. Montrer que Φ est surjective.

d. Φ est-elle injective ?

Exercice 4 (Une matrice de rang 2.)

On considère la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \\ 13 & 14 & 15 & 16 \end{pmatrix}.$$

1. A l'aide d'opérations élémentaires sur les lignes, mettre A sous forme échelonnée réduite.
La matrice A est-elle inversible ?

2. Soit f_A l'application linéaire de $\mathbb{R}^4$ dans $\mathbb{R}^4$ définie par A dans la base canonique $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3}, \vec{e_4})$ de l'espace $\mathbb{R}^4$.

- **a.** Caractériser $\mathrm{Ker}(f_A)$ par des équations et en donner une base.
- **b.** Donner la dimension de $\mathrm{Ker}(f_A)$ et de $\mathrm{Im}(f_A)$.

3. On considère le sous-espace vectoriel F de $\mathbb{R}^4$ défini par les deux équations

$$x + z = 2y \quad \text{et} \quad y + t = 2z.$$

Montrer que ce sous-espace coïncide avec l'image $\mathrm{Im}(f_A)$ de l'application linéaire f_A.

4. Montrer que $\mathrm{Ker}(f_A) \cap \mathrm{Im}(f_A) = \{(0, 0, 0, 0)\}$.
En déduire que $\mathrm{Ker}(f_A)$ et $\mathrm{Im}(f_A)$ sont supplémentaires.

5. Soit $g : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^2$ l'application

$$(x, y, z, t) \mapsto (-2x + y, -4x + t).$$

Montrer que g est linéaire.

6. Ecrire la matrice de g dans les bases canoniques respectives de $\mathbb{R}^4$ et $\mathbb{R}^2$.
On appellera B cette matrice.

7. Calculer la matrice de $g \circ f_A$ dans les bases canoniques respectives de $\mathbb{R}^4$ et $\mathbb{R}^2$.

8. Donner une base de $\mathrm{Im}(g \circ f_A)$.

9. En déduire la dimension de $\mathrm{Ker}(g \circ f_A)$