

Partiel du 2 mars 2013

Durée : 3 heures

Sans documents, à l'exception d'une feuille A4 recto-verso manuscrite.

Les quatre exercices sont indépendants.

Exercice 1 (Un système à paramètre)

Soit $a \in \mathbb{R}$. Mettre le système suivant sous forme matricielle puis déterminer l'ensemble de ses solutions dans $\mathbb{R}^3$. On discutera suivant la valeur du paramètre a .

$$\begin{cases} (1+a)x + y + z = 0 \\ x + (1+a)y + z = 0 \\ x + y + (1+a)z = 0 \end{cases}$$

Appelons S_a le système linéaire de l'énoncé, qui dépend du paramètre $a \in \mathbb{R}$, et SM_a sa forme matricielle :

$$\begin{aligned} & \begin{pmatrix} 1+a & 1 & 1 \\ 1 & 1+a & 1 \\ 1 & 1 & 1+a \end{pmatrix} \\ \Leftrightarrow & \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1+a \\ 1 & 1+a & 1 \\ 1+a & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{array}{l} L_1 \leftrightarrow L_3 \\ L_3 \leftrightarrow L_1 \end{array} \\ \Leftrightarrow & \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1+a \\ 0 & a & -a \\ 0 & -a & -2a-a^2 \end{pmatrix} \quad \begin{array}{l} L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - (1+a)L_1 \end{array} \end{aligned}$$

Supposons $a \neq 0$. Dans ce cas on a :

$$\begin{aligned} SM_a \Leftrightarrow & \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1+a \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & -a & -2a-a^2 \end{pmatrix} \quad L_2 \leftarrow \frac{1}{a}L_2 \\ \Leftrightarrow & \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1+a \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -3a-a^2 \end{pmatrix} \quad L_3 \leftarrow L_3 + aL_2 \end{aligned}$$

Supposons $-a^2 - 3a \neq 0$, i.e. $a \neq -3$. Dans ce cas on a :

$$SM_a \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1+a \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad L_3 \leftarrow \frac{1}{-a(a+3)}L_3$$

Ainsi, si $a \in \mathbb{R} \setminus \{-3, 0\}$, alors S_a a une unique solution $(x, y, z) = (0, 0, 0)$.

Regardons maintenant les cas restants :

$S_0 \Leftrightarrow x + y + z = 0$ en supprimant L_2 et L_3 qui sont équivalentes à la tautologie $(0 = 0)$.

L'ensemble des solutions de S_0 est donc infini et vaut $\{(-y - z, y, z) | y, z \in \mathbb{R}\}$.

Ensuite $SM_{-3} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ en supprimant L_3 qui équivaut à la tautologie $(0 = 0)$.

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \text{ par l'opération } L_1 \leftarrow L_1 - L_2.$$

On a donc $S_{-3} \Leftrightarrow (x = z \text{ et } y = z)$

L'ensemble des solutions de S_{-3} est donc infini et vaut $\{(z, z, z) | z \in \mathbb{R}\}$.

Exercice 2 (Trace et déterminant pour les matrices 2x2.)

On se place dans l'espace vectoriel $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ des matrices réelles 2×2 .

Pour toute matrice $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ on pose : $\det A = ad - bc$ et $\text{tr}(A) = a + d$.

1. Montrer que pour tout $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, pour tout $B \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, on a $\det AB = \det A \times \det B$.

On prend $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}$. On a alors $AB = \begin{pmatrix} ax + bz & ay + bt \\ cx + dz & cy + dt \end{pmatrix}$, de sorte que $\det(AB) = (ax + bz)(cy + dt) - (cx + dz)(ay + bt) = adxt + bcyz - adyz - cbxt = (ad - bc)(xt - yz)$.

2. Soit $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ telle que $M^3 = I_2$. Montrer que $\det(M) = 1$.

On a $1 = \det(I_2) = \det(M^3) = \det(M)^3$. Le nombre réel $\det(M)$ vérifie donc l'équation $0 = x^3 - 1 = (x - 1)(x^2 + x + 1)$. Il vaut donc 1.

3. Soit $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. Montrer que $M^2 - \operatorname{tr}(M)M + \det(M)I_2 = 0$.

C'est un calcul direct, déjà fait en TD.

4. On suppose dorénavant que $M^3 = I_2$.

- a. Montrer que $(\operatorname{tr}(M)^2 - 1)M = (\operatorname{tr}(M) + 1)I_2$ (*)

D'après les questions 2) et 3), on a $M^2 = \operatorname{tr}(M)M - I_2$, qui donne après multiplication par M , $I_2 = M^3 = \operatorname{tr}(M)M^2 - M = \operatorname{tr}(M)(\operatorname{tr}(M)M - I_2) - M$. L'égalité demandée par l'énoncé résulte dès lors par développement et factorisation.

- b. Montrer que si $\operatorname{tr}(M) \neq -1$, alors $M = I_2$.

Si $\operatorname{tr}(M) \neq -1$, on simplifie par $\operatorname{tr}(M) + 1$ (non nul) dans l'égalité (*). On obtient alors $(\operatorname{tr}(M) - 1)M = I_2$. La matrice M ne peut être donc de trace 1 et est par conséquent scalaire (réelle), de cube égal à I_2 : c'est donc l'identité.

- c. Montrer que l'ensemble des matrices de $M(2, \mathbb{R})$ telles que $M^3 = I_2$ est formé de la matrice identité et de l'ensemble des matrices de déterminant 1 et de trace -1 .

Il s'agit d'établir par double inclusion que

$$\{M \mid \det(M) = 1 \text{ et } \operatorname{tr}(M) = -1\} \cup I_2 = \{M \mid M^3 = I_2\}.$$

Si M est de déterminant 1 et de trace -1 , elle vérifie d'après 3), $M^2 + M + I_2 = 0$, ce qui prouve par multiplication par $M - I_2$ que $M^3 = I_2$. On a donc clairement l'inclusion directe.

Si $M^3 = I_2$ et $\operatorname{tr}(M) \neq -1$, on a vu en b) que $M = I_2$. Cela établit l'inclusion inverse.

Exercice 3 (Fonctions paires et impaires.)

On considère E l'espace vectoriel des fonctions réelles (de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$).

Soit $\mathcal{P}$ l'ensemble des fonctions réelles paires : $\mathcal{P} = \{f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \mid \forall x \in \mathbb{R}, f(-x) = f(x)\}$.

Soit $\mathcal{I}$ l'ensemble des fonctions réelles impaires : $\mathcal{I} = \{f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \mid \forall x \in \mathbb{R}, f(-x) = -f(x)\}$.

1. Montrer que $\mathcal{P}$ et $\mathcal{I}$ sont des sous-espaces vectoriels de E .

$\mathcal{P}$ est un sous-ensemble de E . De plus la fonction nulle est paire donc appartient à $\mathcal{P}$.

Soit maintenant $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ et $f, g \in \mathcal{P}$. On a alors pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$(\lambda f + \mu g)(-x) = \lambda f(-x) + \mu g(-x) = \lambda f(x) + \mu g(x) = (\lambda f + \mu g)(x).$$

On a donc $\lambda f + \mu g \in \mathcal{P}$. On conclut que $\mathcal{P}$ est un sous-espace vectoriel de E .

De même, $\mathcal{I}$ est un sous-ensemble de E qui contient la fonction nulle et pour tout $\lambda, \mu \in \mathbb{R}, f, g \in \mathcal{I}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a :

$$(\lambda f + \mu g)(-x) = \lambda f(-x) + \mu g(-x) = \lambda(-f(x)) + \mu(-g(x)) = -(\lambda f + \mu g)(x),$$

ce qui montre que $\mathcal{I}$ est un sous-espace vectoriel de E .

2. Soit $f \in E$. Trouver deux fonctions $g \in \mathcal{P}$ et $h \in \mathcal{I}$ telles que $f = g + h$.

On pose pour tout $x \in \mathbb{R}$: $g(x) = \frac{(f(x) + f(-x))}{2}$ et $h(x) = \frac{(f(x) - f(-x))}{2}$. g est paire, h est impaire et on a bien $f = g + h$.

En déduire que $E = \mathcal{P} + \mathcal{I}$.

$\mathcal{P}$ et $\mathcal{I}$ sont des sous-espaces vectoriels de E donc leur somme $\mathcal{P} + \mathcal{I}$ est un sous-espace vectoriel de E . De plus on vient de montrer que tout élément de E se décompose en somme d'un élément de $\mathcal{P}$ et d'un élément de $\mathcal{I}$, d'où $E = \mathcal{P} + \mathcal{I}$.

3. Montrer que $E = \mathcal{P} \oplus \mathcal{I}$.

Comme $E = \mathcal{P} + \mathcal{I}$ il suffit de montrer que $\mathcal{P} \cap \mathcal{I} = \{0\}$. Soit $f \in \mathcal{P} \cap \mathcal{I}$. On a alors pour tout $x \in \mathbb{R}$: $f(-x) = f(x)$ et $f(-x) = -f(x)$ d'où $f(x) = -f(x)$, ou encore $2f(x) = 0$. Comme $f(x) \in \mathbb{R}$, on en déduit que $f(x) = 0$. Ceci est vrai pour tout $x \in \mathbb{R}$ donc f est la fonction nulle.

4. On considère les fonctions $s(x) = \sin x$ et $p(x) = 3x^3 - 2x^2 + 1$.

- a. Montrer que ces deux fonctions forment une famille libre de E .

Soit λ et $\mu \in \mathbb{R}$ tels que $\lambda s + \mu p = 0$. En évaluant cette fonction en 0 on obtient : $\lambda s(0) + \mu p(0) = 0$ c'est-à-dire $\lambda \times 0 + \mu \times 1 = 0$ et donc $\mu = 0$. Par suite $\lambda s = 0$ et en évaluant en $\frac{\pi}{2}$ on obtient $\lambda = 0$. On en déduit que la famille (s, p) est libre dans E .

- b. Donner la décomposition de chacune de ces deux fonctions suivant la somme directe $E = \mathcal{P} \oplus \mathcal{I}$.
La fonction sinus est impaire donc $s = 0 + s$ est la décomposition demandée.

Un monôme de degré pair est une fonction paire et un monôme de degré impair est une fonction impaire donc en posant $g(x) = -2x^2$ et $h(x) = 3x^3 + 1$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, $p = g + h$ est la décomposition demandée.

5. On considère l'application $\Phi : E \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $\Phi(f) = f(0)$.

- a. Montrer que Φ est linéaire.

Soit $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ et $f, g \in \mathcal{P}$. Alors on a :

$\Phi(\lambda f + \mu g) = (\lambda f + \mu g)(0) = \lambda f(0) + \mu g(0) = \lambda \Phi(f) + \mu \Phi(g)$. On conclut que Φ est linéaire.

- b. Montrer que $\mathcal{I} \subset \text{Ker}(\Phi)$.

Soit $f \in \mathcal{I}$. Alors $f(-0) = -f(0)$. Par ailleurs $-0 = 0$ donc $f(-0) = f(0)$. On a ainsi $f(0) = -f(0)$ ou encore $2f(0) = 0$ ce qui implique que $f(0) = 0$.

- c. Montrer que Φ est surjective.

Soit $a \in \mathbb{R}$. On considère f_a la fonction constante de valeur a ($\forall x \in \mathbb{R}, f_a(x) = a$). f_a est bien un élément de E et on a $\Phi(f_a) = f_a(0) = a$. Ainsi on a montré que tout élément de $\mathbb{R}$ a (au moins) un antécédent par Φ , donc Φ est surjective.

- d. Φ est-elle injective ?

La fonction sinus appartient au noyau de Φ et n'est pas la fonction nulle donc Φ n'est pas injective.

Exercice 4 (Une matrice de rang 2.) On considère la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \\ 13 & 14 & 15 & 16 \end{pmatrix}.$$

1. A l'aide d'opérations élémentaires sur les lignes, mettre A sous forme échelonnée réduite.

La matrice A est-elle inversible ?

$$\begin{aligned} & \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \\ 13 & 14 & 15 & 16 \end{pmatrix} \\ \Leftrightarrow & \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -4 & -8 & -12 \\ 0 & -8 & -16 & -24 \\ 0 & -12 & -24 & -36 \end{pmatrix} \begin{array}{l} L_2 \leftarrow L_2 - 5L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - 9L_1 \\ L_4 \leftarrow L_4 - 13L_1 \end{array} \\ \Leftrightarrow & \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & -8 & -16 & -24 \\ 0 & -12 & -24 & -36 \end{pmatrix} L_2 \leftarrow \frac{1}{-4}L_2 \\ \Leftrightarrow & \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{array}{l} L_3 \leftarrow L_3 + 8L_2 \\ L_4 \leftarrow L_4 + 12L_2 \end{array} \\ \Leftrightarrow & \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} L_1 \leftarrow L_1 - 2L_2 \end{aligned}$$

La forme échelonnée réduite de A a au moins une ligne de zéros, donc A n'est pas inversible.

2. Soit f_A l'application linéaire de $\mathbb{R}^4$ dans $\mathbb{R}^4$ définie par A dans la base canonique $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3, \vec{e}_4)$ de l'espace $\mathbb{R}^4$.

- a. Caractériser $\text{Ker}(f_A)$ par des équations et en donner une base.

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \in \text{Ker}(f_A) \Leftrightarrow A \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x - z - 2t = 0 \\ y + 2z + 3t = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z + 2t \\ -2z - 3t \\ z \\ t \end{pmatrix} = z \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

$$\text{Donc } \text{Ker}(f_A) = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 ; \begin{cases} x - z - 2t = 0 \\ y + 2z + 3t = 0 \end{cases} \right\} \text{ et a pour base } \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

b. Donner la dimension de $\text{Ker}(f_A)$ et de $\text{Im}(f_A)$.

La base trouvée à la question précédente est de taille 2, donc $\dim \text{Ker}(f_A) = 2$.

Ensuite, par la formule du rang, $\dim \text{Im}(f_A) = \dim \mathbb{R}^4 - \dim \text{Ker}(f_A) = 4 - 2 = 2$.

3. On considère le sous-espace vectoriel F de $\mathbb{R}^4$ défini par les deux équations

$$x + z = 2y \quad \text{et} \quad y + t = 2z.$$

Montrer que ce sous-espace coïncide avec l'image $\text{Im}(f_A)$ de l'application linéaire f_A .

$\text{Im}(f_A)$ est le sous-espace vectoriel engendré par les vecteurs colonnes de la matrice A .

On vérifie que chacun de ces vecteurs satisfait aux équations $x + z = 2y$ et $y + t = 2z$.

On en déduit que $\text{Im}(f_A) \subset F$.

Or $\text{Im}(f_A)$ et F sont de même dimension 2, donc ils sont égaux.

4. Montrer que $\text{Ker}(f_A) \cap \text{Im}(f_A) = \{(0, 0, 0, 0)\}$.

En déduire que $\text{Ker}(f_A)$ et $\text{Im}(f_A)$ sont supplémentaires.

$$\text{Par le 2)a), } \text{Ker}(f_A) = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 ; \begin{cases} x - z - 2t = 0 \\ y + 2z + 3t = 0 \end{cases} \right\}.$$

$$\text{Par le 3), } \text{Im}(f_A) = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 ; \begin{cases} x - 2y + z = 0 \\ y - 2z + t = 0 \end{cases} \right\}.$$

$$\text{Donc } \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \in \text{Ker}(f_A) \cap \text{Im}(f_A) \Leftrightarrow \begin{cases} x - z - 2t = 0 \\ y + 2z + 3t = 0 \\ x - 2y + z = 0 \\ y - 2z + t = 0 \end{cases}$$

Par un pivot de Gauss on trouve que ce système est inversible, et a donc une unique solution $x = y = z = t = 0$. Donc $\text{Ker}(f_A) \cap \text{Im}(f_A) = \{(0, 0, 0, 0)\}$.

$\text{Ker}(f_A)$ et $\text{Im}(f_A)$ sont donc en somme directe. Or la somme de leurs dimensions vaut 4, qui est la dimension de l'espace total. Ils sont donc supplémentaires.

5. Soit $g : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^2$ l'application

$$(x, y, z, t) \mapsto (-2x + y, -4x + t).$$

Montrer que g est linéaire.

$$\begin{aligned} \text{On a } \forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}, \forall (x, y, z, t), (x', y', z', t') \in \mathbb{R}^4, & g(\lambda(x, y, z, t) + \mu(x', y', z', t')) = \\ g((\lambda x + \mu x', \lambda y + \mu y', \lambda z + \mu z', \lambda t + \mu t')) &= (-2(\lambda x + \mu x') + \lambda y + \mu y', -4(\lambda x + \mu x') + \lambda t + \mu t') = \\ \lambda g((x, y, z, t)) + \mu g((x', y', z', t')). & \end{aligned}$$

Donc g est linéaire.

6. Ecrire la matrice de g dans les bases canoniques respectives de $\mathbb{R}^4$ et $\mathbb{R}^2$.

On appellera B cette matrice.

$$B = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 & 0 \\ -4 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

7. Calculer la matrice de $g \circ f_A$ dans les bases canoniques respectives de $\mathbb{R}^4$ et $\mathbb{R}^2$.

$$\text{Cette matrice est égale au produit } B.A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 & 0 \\ 9 & 6 & 3 & 0 \end{pmatrix}.$$

8. Donner une base de $\text{Im}(g \circ f_A)$.

Tous les vecteurs colonnes de la matrice précédente sont colinéaires à $\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$. Ce seul vecteur forme donc une base de $\text{Im}(g \circ f_A)$.

9. En déduire la dimension de $\text{Ker}(g \circ f_A)$

L'espace de départ étant toujours $\mathbb{R}^4$, la formule du rang nous donne $\dim \text{Ker}(g \circ f_A) = 4 - 1 = 3$.