Université Paris-Diderot – L2 d'informatique 2012-2013
Algèbre et Analyse élémentaires II (MI2)

Examen du 17 mai 2013

Durée : 3 heures

Sans documents, à l'exception d'une feuille A4 recto-verso manuscrite.

Les quatre exercices sont indépendants.
Barème indicatif :
exercice 1 : 6,5 points,
exercice 2 : 4,5 points,
exercice 3 : 8 points,
exercice 4 : 4,5 points.

Exercice 1 (Algèbre linéaire)

Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ est :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Soit $v_1 = e_2 + e_3$, $v_2 = e_1 + e_3$ et $v_3 = e_1 + e_2$.

1. Montrer que $\mathcal{B}' = (v_1, v_2, v_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

2. Calculer $f(v_1)$, $f(v_2)$ et $f(v_3)$, et en déduire la matrice A' de f dans la base $\mathcal{B}'$.

3. Écrire la matrice de passage P de la base $\mathcal{B}$ à la base $\mathcal{B}'$.

4. Calculer la matrice P^{-1}.

5. Écrire la formule reliant les matrices A, A' et P (on ne demande pas d'effectuer le calcul).

6. Calculer la matrice A'^3.

7. En déduire A^3. Que représente cette matrice ?

Exercice 2 (Primitive d'une fraction rationnelle)

On considère la fraction rationnelle

$$R : x \mapsto R(x) = \frac{x+1}{(x-1)(x^2+x+1)}.$$

1. Quel est le domaine de définition de R ?

2. Décomposer R en éléments simples.

3. Donner la forme générale d'une primitive de R, sur chaque intervalle où elle est définie.

4. Calculer la primitive de la fonction R qui s'annule en 0 et 2.

Exercice 3 (Développements limités)

On rappelle que les fonctions $\cosh(x)$ et $\sinh(x)$ sont respectivement les parties paires et impaires de la fonction exponentielle $x \mapsto e^x$. Autrement dit, pour tout x,

$$\cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \qquad \text{et} \qquad \sinh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}\cdot$$

On rappelle aussi que la fonction $x \mapsto \arctan(x)$ définie sur $\mathbb{R}$ est la fonction réciproque de la fonction $x \in]-\pi/2, +\pi/2[\mapsto \tan(x)$, et que l'on a

$$\arctan'(x) = \frac{1}{1+x^2}\cdot$$

1. Donner les développements limités en 0 à l'ordre 4 des fonctions $\cosh(x)$ et $\sinh(x)$ (on expliquera comment ils sont obtenus).

2. Donner un développement limité en 0 à l'ordre 7 de la fonction $\arctan(x)$ (on expliquera comment il est obtenu).

3. On considère les fonctions f et g définies sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \arctan(e^x) \text{ et } g(x) = \frac{1}{2}\arctan(\sinh(x)).$$

a. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\cosh(x)^2 - \sinh(x)^2 = 1$.

b. Calculer les dérivées de f et g et les comparer.

c. Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a :

$$\arctan(e^x) \;=\; \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}\arctan(\sinh(x)).$$

4. A l'aide de l'égalité précédente, donner un développement limité en 0 à l'ordre 3 de la fonction f.

5. On souhaite esquisser le graphe de la fonction f.

a. Quelle est l'équation de la tangente au graphe de f au point S d'abcisse 0 ?

b. Quelle est la position de la courbe par rapport à sa tangente au voisinage de S ?

c. Montrer que f est strictement croissante, déterminer sa limite en $+\infty$ et en $-\infty$ et enfin dessiner l'allure du graphe de f.

Exercice 4 (Une équation différentielle linéaire du premier ordre)

1. Montrer grâce à une intégration par parties que pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a :

$$\int_0^x e^{\arctan t}\,\mathrm{d}t \;=\; (x^2+1)e^{\arctan x} - 2\int_0^x t e^{\arctan t}\mathrm{d}t\,.$$

En déduire une primitive de $(1+2x)e^{\arctan x}$.

2. On considère l'équation différentielle :

$$y' + \frac{y}{1+x^2} = 1 + 2x.$$

a. Résoudre l'équation homogène associée.

b. Appliquer la méthode la variation de la constante pour trouver une solution particulière.