Université Denis Diderot Paris 7

EXAMEN du 23 juin 2010 (deuxième session)

Cours de Mathématiques, MI2, première année (L1- Info)

Les exercices sont indépendants et le barème est indicatif. Les documents autorisés sont le polycopié, les notes de cours et de TD. Les calculatrices ne sont pas autorisées.

Exercice 1 : algèbre linéaire (7 points)

On note dans cet exercice un élément de $\mathbf{R}^3$ *comme un vecteur ligne.*

Soit l'application linéaire de $\mathbf{R}^3$ dans $\mathbf{R}^3$ définie par :

$$f(x,y,z) = (2y, 3x+5y-3z, 4x+8y-4z).$$

1.a) Déterminer la matrice A de f dans la base canonique de $\mathbf{R}^3$.

1.b) Montrer que $\dim \operatorname{Ker}(f) = 1$ et trouver un générateur w_1 de $\operatorname{Ker}(f)$.

1.c) Déterminer la dimension de $\operatorname{Im}(f)$ et une équation de l'image.

1.d) Montrer qu'il existe un vecteur non nul w_2 tel que $f(w_2) = -w_2$; montrer de même qu'il existe un vecteur non nul w_3 tel que $f(w_3) = 2w_3$.

1.e) Vérifier que $\mathcal{B} := \{w_1, w_2, w_3\}$ est une base de $\mathbf{R}^3$ et déterminer la matrice B de f dans cette nouvelle base.

1.f) Écrire la matrice de passage P de la base canonique vers la base $\mathcal{B}$ et calculer son inverse.

1.g) Écrire la relation liant A, B et P et vérifier ainsi le calcul fait en 1.e.

Exercice 2 : développements limités (3 points)

2.a) Calculer la limite suivante

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 2\sin x - 1 + \log(1+x)}{x^3}.$$

2.b) Déterminer le développement limité au voisinage $u = 0$, à l'ordre 2, de la fonction $f(u) = \sqrt{1+u+u^2}$.

2.c) Montrer que le graphe de la fonction $g(x) = \sqrt{x^2+x+1}$ possède une asymptote quand x tend vers $+\infty$, déterminer cette asymptote et la position de la courbe par rapport à cette asymptote. [On pourra utiliser le calcul fait en 2.b]

Exercice 3 : calcul intégral (5 points)

On rappelle que, lorsque $t = \operatorname{tg}(x/2)$, *on a les formules* $\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$ *et* $\sin x = \frac{2t}{1+t^2}$. *On pourra utiliser la valeur* $\operatorname{tg}(\pi/6) = 1/\sqrt{3}$.

3.a) Factoriser dans $\mathbf{R}[X]$ le polynôme $X^4 - 1$.

3.b) Décomposer en éléments simples la fraction rationnelle suivante :

$$f(X) = \frac{X + X^2 + X^3}{X^4 - 1}.$$

3.b) Donner une primitive de $\frac{1}{x^2+1}$ et $\frac{x}{x^2+1}$ puis déterminer une primitive de f.

3.c) À l'aide d'un changement de variable, calculer l'intégrale:

$$I := \int_0^{\pi/3} \frac{(2 + \sin x)\sin x}{(1 + \cos x + \sin x)(1 + \cos x - \sin x)} dx.$$

Exercice 4 : équations différentielles(5 points)

Trouver l'ensemble des solutions (réelles) des équations différentielles suivantes en précisant leurs intervalles de définition.

4.a) $y' = 2xy^2 + 2x$.

4.b) $\cos(x)y' + \sin(x)y = \cos^2(x)$.

4.c) $y" + 4y = 2 + x + \sin x$.