Université Denis Diderot Paris 7

PARTIEL du Samedi 13 mars 2010

Cours de Mathématiques, MI2, première année (L1- Info)

Les exercices sont indépendants et le barème est indicatif. Les documents autorisés sont le polycopié, les notes de cours et de TD. Les calculatrices ne sont pas autorisées.

Rappel. Si F, G sont deux sous-espaces vectoriels de E, la notation $E = F \oplus G$ (l'espace E est somme directe de F et G) signifie que $E = F + G$ et $F \cap G = \{0\}$.

Exercice 1 (3 points)

On définit l'ensemble $H = \{(x, y, z, t) \in \mathbf{R}^4 \mid x + 2y - z + 5t = 0\}$.

1.a) Montrer que H est un sous-espace vectoriel et déterminer sa dimension.

1.b) Déterminer une base de H et compléter celle-ci en une base de $\mathbf{R}^4$.

1.c) On introduit P le plan engendré par les vecteurs $e_1 = (1, 0, 0, 0)$ et $e_2 = (0, 1, 0, 0)$. Déterminer la dimension et une base de l'intersection $H \cap P$.

Exercice 2 (3 points)

On définit l'application $f : \mathbf{R}^6 \to \mathbf{R}^4$ par $X \mapsto AX$ avec

$$X = \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

2.a) Déterminer la dimension et une base de l'image de f.

2.b) Parmi les vecteurs de la base canonique de $\mathbf{R}^4$, lesquels sont dans l'image de f.

2.c) Lorsque e_i est un vecteur de la base canonique de $\mathbf{R}^4$, déterminer l'ensemble de ses antécédents par l'application f.

Exercice 3 (6 points)

On désigne par $\mathcal{B} = \{e_1, e_2, e_3\}$ la base canonique de $\mathbf{R}^3$ et on définit l'application linéaire $f : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ par :

$$f(x, y, z) = (x - y + 2z, 2x + 8y - z, -x - 9y + 3z).$$

3.a) Donner la matrice A de f par rapport la base $\mathcal{B}$.

3.b) Déterminer le noyau et l'image de f (on en donnera des équations et une base). Montrer que $\mathbf{R}^3 = \mathrm{Ker}(f) \oplus \mathrm{Im}(f)$.

3.c) Soient les trois vecteurs de $\mathbf{R}^3$ suivants :

$$f_1 = (-3, 1, 2), \quad f_2 = (1, 0, 1) \quad \text{et} \quad f_3 = (0, 1, -1).$$

Montrer que $\mathcal{B}' = \{f_1, f_2, f_3\}$ est une base de $\mathbf{R}^3$.

3.d) Calculer les composantes des vecteurs f_1, f_2 et f_3 dans la décomposition en somme directe $\mathbf{R}^3 = \mathrm{Ker}(f) \oplus \mathrm{Im}(f)$.

3.e) Donner la matrice de passage P de $\mathcal{B}$ vers $\mathcal{B}'$ et calculer P^{-1}.

3.f) Calculer la matrice A' de l'application f dans la base $\mathcal{B}'$.

Exercice 4 (3 points)

On introduit l'endomorphisme $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ dont la matrice dans la base canonique est $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$; on note I la matrice identité $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et Id l'application associée.

4.a) Vérifier que $A^2 - 5A + 6I = 0$.

4.b) Montrer que $\mathbf{R}^2 = \mathrm{Ker}(f - 2Id) \oplus \mathrm{Ker}(f - 3Id)$.

4.c) En déduire l'existence d'une base de $\mathbf{R}^2$ dans laquelle la matrice de f s'écrit :

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Exercice 5 (3 points)

5.a) Calculer un développement limité à l'ordre 4 en $x = 0$ de la fonction $\sin^3(x)\log(1+x)$.

5.b) Même question avec la fonction $e^{x^2} + \log\cos x - \sqrt{1 + x^2}$.

5.c) En déduire le calcul de la limite suivante :

$$\lim_{x \to 0} \frac{e^{x^2} + \log\cos x - \sqrt{1 + x^2}}{\sin^3(x)\log(1 + x)}.$$

Exercice 6 (2 points)

On définit la fonction $f(x) = \frac{x^3+x^2-3x+1}{x^2-x+1}$. Montrer que la courbe d'équation $y = f(x)$ (le graphe de la fonction f) admet une asymptote lorsque x tend vers $+\infty$, déterminer l'équation de cette asymptote ainsi que la position de la courbe par rapport cette asymptote.