**Université Denis Diderot Paris 7**

**Un corrigé du partiel du Samedi 13 mars 2010**

**Cours de Mathématiques, MI2, première année (L1- Info)**

*Rappel. Si $F$, $G$ sont deux sous-espaces vectoriels de $E$, la notation $E = F \oplus G$ (l'espace $E$ est somme directe de $F$ et $G$) signifie que $E = F + G$ et $F \cap G = \{0\}$.*

## Exercice 1 (3 points)

*On définit l'ensemble $H = \{(x, y, z, t) \in \mathbf{R}^4 \mid x + 2y - z + 5t = 0\}$.*

1.a) *Montrer que $H$ est un sous-espace vectoriel et déterminer sa dimension.*

Il faut vérifier que si $u = (x, y, z, t)$ et $u' = (x', y', z', t')$ appartiennent à $H$ alors une combinaison linéaire de $u$ et $u'$ est aussi dans $H$; c'est en fait immédiat puisque l'équation définissant $H$ est linéaire. Notons $f : \mathbf{R}^4 \to \mathbf{R}$ cette application linéaire donnée par $f(x, y, z, t) = x + 2y - z + 5t$, son noyau est $H$ et son image est un sous-espace vectoriel non nul ($f$ n'est pas identiquement nulle) donc égal à $\mathbf{R}$; le théorème de la dimension permet de conclure que $\dim H = \dim \mathbf{R}^4 - \dim \mathrm{Im}(f) = 4 - 1 = 3$.

1.b) *Déterminer une base de $H$ et compléter celle-ci en une base de $\mathbf{R}^4$.*

Pour $u = (x, y, z, t)$ dans $H$ on a $x = -2y + z - 5t$ donc

$$u = (-2y + z - 5t, y, z, t) = y(-2, 1, 0, 0) + z(1, 0, 1, 0) + t(-5, 0, 0, 1)$$

et les trois vecteurs $f_1 = (-2, 1, 0, 0)$, $f_2 = (1, 0, 1, 0)$ et $f_3 = (-5, 0, 0, 1)$ forment une base de $H$. Pour compléter la base il suffit de choisir un vecteur n'appartenant pas à $H$, par exemple $(1, 0, 0, 0)$.

1.c) *On introduit $\Pi$ le plan engendré par les vecteurs $e_1 = (1, 0, 0, 0)$ et $e_2 = (0, 1, 0, 0)$. Déterminer la dimension et une base de l'intersection $H \cap \Pi$.*

Le plan $\Pi$ a pour équations $z = t = 0$ (immédiat) donc $H \cap P$ a pour équations $z = t = x + 2y - z + 5t = 0$ ou encore $z = t = x + 2y = 0$; un vecteur $u = (x, y, z, t)$ dans $H \cap \Pi$ s'écrit donc $u = (-2y, y, 0, 0) = y(-2, 1, 0, 0)$. Le vecteur $(-2, 1, 0, 0)$ fournit donc une base de $H \cap \Pi$ qui est de dimension 1.

## Exercice 2 (3 points)

*On définit l'application $f : \mathbf{R}^6 \to \mathbf{R}^4$ par $X \mapsto AX$ avec*

$$X = \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

2.a) *Déterminer la dimension et une base de l'image de $f$.*

Ce calcul est facilité par le fait que la matrice est échelonnée. L'image de $f$ est engendré par les vecteurs colonne de la matrice et des générateurs indépendants sont fournis par les colonnes contenant un pivot, c'est-à-dire les trois vecteurs:

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad e_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

L'image est de dimension trois.

2.b) *Parmi les vecteurs de la base canonique de $\mathbf{R}^4$, lesquels sont dans l'image de $f$.*

D'après le calcul précédent seul le dernier vecteur de la base canonique $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ n'appartient pas à l'image.

2.c) *Lorsque $e_i$ est un vecteur de la base canonique de $\mathbf{R}^4$, déterminer l'ensemble de ses antécédents par l'application $f$.*

Si $u_i \in \mathbf{R}^6$ est tel que $f(u_i) = e_i$ alors l'ensemble des antécédents de $e_i$ par l'application $f$ est donné par $u_i + \mathrm{Ker}(f) = \{u_i + u \mid u \in \mathrm{Ker}(f)\}$. Si on note $e'_i$ les vecteurs de la base canonique de $\mathbf{R}^6$ on a $f(e'_1) = e_1$, $f(e'_3) = e_2$ et $f(e'_5) = e_3$. Comme $A$ est échelonné, le calcul de $\mathrm{Ker}(f)$ en coordonnées $(x, y, z, t, v, w)$ donne les variables libres $y, t, w$ et les équations $x = -2y - 3t - w$, $z = -4t - w$ et $v = -w$.

Par exemple les antécédents de $e_1$ s'écrivent $(1 - 2y - 3t - w, y, -4t - w, t, w, -w)$.

## Exercice 3 (6 points)

*On désigne par $\mathcal{B} = \{e_1, e_2, e_3\}$ la base canonique de $\mathbf{R}^3$ et on définit l'application linéaire $f : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ par :*

$$f(x, y, z) = (x - y + 2z, 2x + 8y - z, -x - 9y + 3z).$$

3.a) *Donner la matrice $A$ de $f$ par rapport la base $\mathcal{B}$.*

On écrit $f(e_1) = (1, 2, -1) = e_1 + 2e_2 - e_3$, $f(e_2) = (-1, 8, -9) = -e_1 - 8e_2 - 9e_3$, $f(e_3) = (2, -1, 3) = 2e_1 - e_2 + 3e_3$ donc

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 8 & -1 \\ -1 & -9 & 3 \end{pmatrix}.$$

3.b) *Déterminer le noyau et l'image de $f$ (on en donnera des équations et une base). Montrer que $\mathbf{R}^3 = \mathrm{Ker}(f) \oplus \mathrm{Im}(f)$.*

La résolution du système $AX = b$ se fait en échelonnant (détails des calculs omis):

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & b_1 \\ 2 & 8 & -1 & b_2 \\ -1 & -9 & 3 & b_3 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & b_1 \\ 0 & 1 & -1 & (b_2 - 2b_1)/10 \\ 0 & 0 & 0 & b_3 + b_2 - b_1 \end{pmatrix}$$

On obtient ainsi l'équation de l'image $\operatorname{Im} f = \{(x, y, z) \mid y + z - x = 0\}$ et les équations du noyau $x = -\frac{3}{2}z$, $y = z/2$. Ainsi une base du noyau est donnée par le vecteur $(-3, 1, 2)$ dont on vérifie qu'il n'appartient pas à l'image. On a donc $\dim \operatorname{Ker}(f) = 1$ , $\dim \operatorname{Im}(f) = 2$ et $\operatorname{Ker}(f) \cap \operatorname{Im}(f) = \{0\}$ donc $\mathbf{R}^3 = \operatorname{Ker}(f) \oplus \operatorname{Im}(f)$. L'image est engendrée par les trois vecteurs $f(e_1)$, $f(e_2)$ et $f(e_3)$, une base est donnée par exemple par les deux premiers vecteurs $f(e_1)$, $f(e_2)$ (en vérifiant qu'ils sont indépendants).

3.c) *Soient les trois vecteurs de* $\mathbf{R}^3$ *suivants :*

$$f_1 = (-3, 1, 2), \quad f_2 = (1, 0, 1) \quad \textit{et} \quad f_3 = (0, 1, -1).$$

*Montrer que* $\mathcal{B}' = \{f_1, f_2, f_3\}$ *est une base de* $\mathbf{R}^3$.

Remarquons que $f_1 \in \operatorname{Ker}(f)$ et $f_2, f_3 \in \operatorname{Im} f$. On voit immédiatement que $f_2$ et $f_3$ sont indépendants et donc, d'après la question précédente $f_1, f_2, f_3$ sont indépendants et forment donc une base. [On pouvait évidemment aussi faire un calcul direct.]

3.d) *Calculer les composantes des vecteurs* $f_1$, $f_2$ *et* $f_3$ *dans la décomposition en somme directe* $\mathbf{R}^3 = \operatorname{Ker}(f) \oplus \operatorname{Im}(f)$.

D'après la remarque précédente $f_1 \in \operatorname{Ker}(f)$ alors que $f_2, f_3 \in \operatorname{Im} f$.

3.e) *Donner la matrice de passage* $P$ *de* $\mathcal{B}$ *vers* $\mathcal{B}'$ *et calculer* $P^{-1}$.

On a

$$P = \begin{pmatrix} -3 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Le calcul de l'inverse (détails omis)

$$P^{-1} = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 3 & 3 & 3 \\ 1 & 5 & -1 \end{pmatrix}$$

3.f) *Calculer la matrice* $A'$ *de l'application* $f$ *dans la base* $\mathcal{B}'$.

On peut procéder de deux façons : soit on revient à la définition de la matrice d'une application dans une base, soit on utilise la formule de changement de base (les deux méthodes sont instructives).

Pour la première méthode, on doit exprimer $f(f_i)$ comme combinaison linéaire de $f_1, f_2, f_3$. Ici on sait que $f_1 \in \operatorname{Ker}(f)$ et que $f_2, f_3$ forment une base de $\operatorname{Im}(f)$ donc on a a priori

$$f(f_1) = 0, \quad f(f_2) = af_2 + bf_3 \quad \text{et} \quad f(f_3) = cf_2 + df_3$$

et on pourra écrire

$$A' = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & c \\ 0 & b & d \end{pmatrix}$$

Le calcul des coefficients se fait ainsi: $f(1,0,1) = (3,1,2) = a(1,0,1) + b(0,1,-1) = (a,b,a-b)$ donc $a = 3$ et $b = 1$; $f(0,1,-1) = (-3,9,-12) = c(1,0,1) + d(0,1,-1) = (c,d,c-d)$ donc $c = -3$ et $d = 9$.

Pour la deuxième méthode, on écrit la formule de changement de base $A' = P^{-1}AP$ et on effectue le produit de ces trois matrices

$$A' = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 3 & 3 & 3 \\ 1 & 5 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 8 & -1 \\ -1 & -9 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -3 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -3 \\ 0 & 1 & 9 \end{pmatrix}.$$

## Exercice 4 (3 points)

*On introduit l'endomorphisme $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ dont la matrice dans la base canonique est $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$; on note $I$ la matrice identité $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et Id l'application associée.*

4.a) *Vérifier que $A^2 - 5A + 6I = 0$.*

On calcule $A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 5 \\ 10 & 14 \end{pmatrix}$ puis

$$A^2 - 5A + 6I = \begin{pmatrix} -1 & 5 \\ 10 & 14 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -5 & -5 \\ 10 & -20 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 6 \end{pmatrix} = 0.$$

4.b) *Montrer que $\mathbf{R}^2 = \mathrm{Ker}(f - 2Id) \oplus \mathrm{Ker}(f - 3Id)$.*

L'application linéaire associée à la matrice $A - 2I = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$ a un noyau de dimension 1 engendré par $f_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$; l'application linéaire associée à la matrice $A - 3I = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$ a un noyau de dimension 1 engendré par $f_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ et ces deux vecteurs sont linéairement indépendants donc $\mathbf{R}^2 = \mathbf{R}.f_1 \oplus \mathbf{R}.f_2 = \mathrm{Ker}(f - 2Id) \oplus \mathrm{Ker}(f - 3Id)$.

4.c) *En déduire l'existence d'une base de $\mathbf{R}^2$ dans laquelle la matrice de $f$ s'écrit :*

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Comme $f(f_1) = 2f_1$ et $f(f_2) = 3f_2$, dans la base $f_1, f_2$ l'application $f$ a pour matrice $B$.

## Exercice 5 (3 points)

5.a) *Calculer un développement limité à l'ordre 4 en $x = 0$ de la fonction* $\sin^3(x)\log(1+x)$.

On sait que $\sin x = x + \epsilon(x)x$ et $\log(1+x) = x + \epsilon(x)x$, donc $\sin^3(x)\log(1+x) = x^4(1+\epsilon_1(x))^3(1+\epsilon_2(x)) = x^4 + \epsilon(x)x^4$.

5.b) *Même question avec la fonction* $e^{x^2} + \log\cos x - \sqrt{1+x^2}$.

En substituant $x^2$ à la place de $x$ dans le DL de $e^x$ et de $\sqrt{1+x}$ on a directement:

$$\exp(x^2) = 1 + \frac{x^2}{1!} + \frac{x^4}{2!} + \epsilon(x)x^4 \quad \text{et} \quad \sqrt{1+x^2} = 1 + \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{8} + \epsilon(x)x^4.$$

Par ailleurs $\cos(x) - 1 = -\frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \epsilon(x)x^4$ tandis que $\log(1+u) = u - \frac{u^2}{2} + \frac{u^3}{3} + \frac{u^4}{4} + \epsilon(u)u^4$ donc en utilisant la règle de calcul pour les composées on obtient (en écrivant $\log\cos x = \log(1 + (\cos x - 1))$)

$$\log\cos x = \left(-\frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!}\right) - \frac{1}{2}\left(-\frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!}\right)^2 + \epsilon(x)x^4 = -\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{12} + \epsilon(x)x^4$$

En sommant ces DL on obtient

$$e^{x^2} + \log\cos x - \sqrt{1+x^2} = 1 + \frac{x^2}{1!} + \frac{x^4}{2!} - \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{12} - 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{8} + \epsilon(x)x^4 = \frac{13}{24}x^4 + \epsilon(x)x^4.$$

5.c) *En déduire le calcul de la limite suivante :*

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^{x^2} + \log\cos x - \sqrt{1+x^2}}{\sin^3(x)\log(1+x)}.$$

On calcule

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^{x^2} + \log\cos x - \sqrt{1+x^2}}{\sin^3(x)\log(1+x)} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{13}{24}x^4 + \epsilon(x)x^4}{x^4 + \epsilon(x)x^4} = \frac{13}{24}.$$

## Exercice 6 (2 points)

*On définit la fonction* $f(x) = \frac{x^3+x^2-3x+1}{x^2-x+1}$*. Montrer que la courbe d'équation* $y = f(x)$ *(le graphe de la fonction* $f$*) admet une asymptote lorsque* $x$ *tend vers* $+\infty$*, déterminer l'équation de cette asymptote ainsi que la position de la courbe par rapport cette asymptote.*

Ecrivons $f(x) = x\frac{1+\frac{1}{x}-\frac{3}{x^2}+\frac{1}{x^3}}{1-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}$ ou encore pour alléger l'écriture $f(x) = xg(1/x)$ avec $g(u) = \frac{1+u-3u^2+u^3}{1-u+u^2}$. Nous allons calculer un DL à l'ordre 2 de $g(u)$ sous la forme $g(u) = a + bu + cu^2 + \epsilon(u)u^2$ et en déduire

$$f(x) = ax + b + \frac{c}{x} + \epsilon(\frac{1}{x})\frac{1}{x}.$$

On obtiendra alors l'équation de l'asymptote $y = ax + b$ en notant qu'on a bien :

$$\lim_{x\to\infty} (f(x) - ax - b) = 0.$$

La position de la courbe par rapport  cette asymptote sera déterminée par le signe de $c$ (nota: si par “malchance” $c = 0$ alors il faudra calculer un DL d'ordre supérieur). Calculons maintenant les coefficients $a, b, c$.

$$g(u) = \frac{1 + u - 3u^2 + u^3}{1 - u + u^2} = (1+u-3u^2)(1+u-u^2+(u-u^2)^2)+\epsilon(u)u^2 = 1+2u-4u^2+\epsilon(u)u^2.$$

Ainsi l'asymptote a pour équation $y = x + 2$ et la courbe est *en dessous* de l'asymptote (puisque $c = -4 < 0$).

Remarque. Comme $f(x)$ est une fraction rationnelle, on pouvait aussi faire la division euclienne de $x^3 + x^2 - 3x + 1$ par $x^2 - x + 1$, ce qui donne $x^3 + x^2 - 3x + 1 = (x + 2)(x^2 - x + 1) - 2x - 1$ et récrire $f(x)$ sous la forme

$$f(x) = x + 2 - \frac{2x + 1}{x^2 - x + 1}.$$

On voit alors directement que $y = x + 2$ est asymptote et que la courbe *en dessous* de l'asymptote (puisque $\frac{2x+1}{x^2-x+1} < 0$ quand $x$ tend vers l'infini).