Université Denis Diderot Paris 7

EXAMEN du 21 mai 2010

Cours de Mathématiques, MI2, première année (L1- Info)

Les exercices sont indépendants et le barème est indicatif. Les documents autorisés sont le polycopié, les notes de cours et de TD. Les calculatrices ne sont pas autorisées.

Exercice 1 : algèbre linéaire (7 points)

On note dans cet exercice un élément de $\mathbf{R}^3$ comme un vecteur ligne.

Soit l'application linéaire de $\mathbf{R}^3$ dans $\mathbf{R}^3$ définie par :

$$f(x, y, z) = (4y - 4z, -x + 3y - 2z, -x + y).$$

1.a) Déterminer la matrice A de f dans la base canonique de $\mathbf{R}^3$.

1.b) Montrer que $\dim \mathrm{Ker}(f) = 1$ et trouver un générateur w_1 de $\mathrm{Ker}(f)$.

1.c) Déterminer la dimension de $\mathrm{Im}(f)$ et une équation de l'image.

1.d) Montrer qu'il existe un vecteur non nul w_2 tel que $f(w_2) = w_2$; montrer de même qu'il existe un vecteur non nul w_3 tel que $f(w_3) = 2w_3$.

1.e) Vérifier que $\mathcal{B} := \{w_1, w_2, w_3\}$ est une base de $\mathbf{R}^3$ et déterminer la matrice B de f dans cette nouvelle base.

1.f) Écrire la matrice de passage P de la base canonique vers la base $\mathcal{B}$ et calculer son inverse.

1.g) Écrire la relation liant A, B et P et vérifier ainsi le calcul fait en 1.e.

Exercice 2 : développements limités (3 points)

2.a) Calculer la limite suivante

$$\lim_{x \to 0} \frac{e^x - \cos x - x}{1 - \sqrt{1 - x^2}}.$$

2.b) Déterminer le développement limité au voisinage $u = 0$, à l'ordre 3, de la fonction $f(u) = \log(1 + u + u^2)$.

2.c) Montrer que le graphe de la fonction $g(x) = x^2 \big(\log(x^2 + x + 1) - 2 \log x\big)$ possède une asymptote quand x tend vers $+\infty$, déterminer cette asymptote et la position de la courbe par rapport à cette asymptote. [On pourra utiliser le calcul fait en 2.b]

Exercice 3 : calcul intégral (5 points)

On rappelle que, lorsque $t = \mathrm{tg}(x/2)$, *on a les formules* $\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$ *et* $\sin x = \frac{2t}{1+t^2}$. *On pourra utiliser les valeurs* $\mathrm{tg}(\pi/4) = 1$ *et* $\mathrm{tg}(\pi/6) = 1/\sqrt{3}$.

3.a) Décomposer en éléments simples la fraction rationnelle suivante :

$$f(X) = \frac{1 + X + X^2}{X(X+1)(X^2+1)}.$$

3.b) Déterminer une primitive de f.

3.c) À l'aide d'un changement de variable, calculer l'intégrale:

$$I := \int_{\pi/3}^{\pi/2} \frac{(1+\cos x)(2+\sin x)}{\sin x(1+\cos x+\sin x)} dx.$$

Exercice 4 : équations différentielles(5 points)

Trouver l'ensemble des solutions (réelles) des équations différentielles suivantes en précisant leurs intervalles de définition.

4.a) $y' + xy^3 = 0$.

4.b) $y' + 2xy = x$.

4.c) $y" + y = 1 + e^x + \sin x$.