Université Paris Diderot
Département de Sciences Exactes

MI2 – Année 2009/10
L2 Info

Devoir à la maison, révisions en vue de l'examen :

(à rendre la semaine du 3 mai au 6 mai)

Exercice 1 [Algèbre linéaire I] Soit l'application linéaire de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$ définie par :

$$f(x,y,z) = (-2x+5y-z, -2x+2y+2z, -2x+5y-z).$$

1. Déterminer la matrice A de f dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$.
2. Montrer que $\dim \mathrm{Ker}(f) = 1$ et trouver un générateur v_1 de $\mathrm{Ker}(f)$.
3. Déterminer la dimension de $\Im m(f)$ et une équation de l'image.
4. Montrer qu'il existe un vecteur non nul v_2 tel que $f(v_2) = 2v_2$; montrer de même qu'il existe un vecteur non nul v_3 tel que $f(v_3) = -3v_3$.
5. Montrer que v_2, v_3 forment une base de $\Im m(f)$.
6. Posons $\mathcal{B} = \{v_1, v_2, v_3\}$, vérifier que c'est une base de $\mathbb{R}^3$ et écrire la matrice de f dans la base $\mathcal{B}$.

Exercice 2 [Algèbre linéaire II] Soit $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ l'application linéaire donnée dans les bases canoniques par la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -5 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

1. Montrer que les vecteurs suivant forment une base de $\mathbb{R}^3$

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad v_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

   et écrire la matrice de passage P de la base canonique de $\mathbb{R}^3$ vers cette nouvelle base.
2. Montrer de même que les vecteurs suivant forment une base de $\mathbb{R}^2$

$$w_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad w_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

   et écrire la matrice de passage Q de la base canonique de $\mathbb{R}^2$ vers cette nouvelle base.
3. Calculer la matrice B de f dans les bases v_1, v_2, v_3 et w_1, w_2.

Exercice 3 [Développements limités] Calculer les limites suivantes

1. $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{e^x - \cos x}{1 - \sqrt{1-x^2}}$;
2. $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{e^x - \cos x - x}{1 - \sqrt{x - \log(1+x)}}$;
3. $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{2\,\mathrm{tg}\, x - \mathrm{tg}\, 2x}{x(1-\cos 3x)}$;

Exercice 4 [Calcul intégral] On rappelle les formules suivantes, où on note $t := \mathrm{tg}(x/2)$:

$$\cos(x) = \frac{1-t^2}{1+t^2} \quad \text{et} \quad \sin(x) = \frac{2t}{1+t^2}.$$

1. Décomposer en éléments simples la fraction rationnelle :

$$f(X) = \frac{1}{(X^2+1)(X+1)(X+3)}.$$

2. Déterminer une primitive de f.
3. A l'aide d'un changement de variables, calculer l'intégrale :

$$\int_0^{\pi/2} \frac{(1+\cos x)^2}{(1+\sin x+\cos x)(2+2\cos x+\sin x)}dx.$$

Exercice 5 Trouver l'ensemble des solutions des équations différentielles suivantes, en précisant soigneusement l'intervalle de définition de celles-ci :

1. $y' = xy^2$.
2. $xy' + y = \cos x$.
3. $y'' + 4y = \cos(x) + \sin(2x) + x + e^{2x}$.