

Examen du 14 juin 2007

Durée 3 heures

Tous documents, calculatrices et moyens de communication interdits.

Exercice 1 Calculer les intégrales suivantes :

a) $\int_0^{\pi/4} \frac{dx}{(\cos x)^3}$

b) $\int_0^{\ln 2} \sqrt{e^x - 1} dx$

* * * * *

✓ **Exercice 2** . Décomposer en éléments simples sur $\mathbb{R}$ et intégrer la fraction rationnelle suivante :

$$F(X) = \frac{X^2 + 3}{X^5 + 3X^4 + 4X^3 + 4X^2 + 3X + 1}.$$

* * * * *

✓ **Exercice 3**

- ✓ 1. Trouver deux entiers n et m tels que $29n + 17m = 1$.
2. On considère l'équation suivante avec $x, y \in \mathbb{Z}$

$$29x + 17y = 5 \tag{1}$$

- ✓ (a) Trouver une solution particulière $(x_0, y_0) \in \mathbb{Z}^2$ de (1).
- ✓ (b) Montrer que si $(x_1, y_1) \in \mathbb{Z}^2$ est une autre solution de (1) alors $(x_1 - x_0, y_1 - y_0)$ est une solution de

$$29x + 17y = 0 \tag{2}$$

- ✓ (c) Résoudre (2) et donner toutes les solutions de (1) dans $\mathbb{Z}^2$.

* * * * *

✓ **Exercice 4** On considère l'équation différentielle

$$y'' + y' - 2y = e^x(x + 1).$$

Trouver la solution générale de cette équation et la solution particulière $y(x)$ telle que $y(0) = 0$ et $y'(0) = 0$.

* * * * *

Exercice 5 Soit $M_3(\mathbb{R})$ l'espace des matrices d'ordre 3 à valeurs réelles et soit F et G les sous-ensembles de $M_3(\mathbb{R})$ définis par :

$$F = \left\{ \begin{pmatrix} a+b & 0 & c \\ 0 & b+c & 0 \\ c+a & 0 & a+b \end{pmatrix} \mid a, b, c \in \mathbb{R} \right\}$$

$$G = \left\{ \begin{pmatrix} a+b+d & a & c \\ 0 & b+d & 0 \\ a+c+d & 0 & a+c \end{pmatrix} \mid a, b, c, d \in \mathbb{R} \right\}.$$

✓ Montrer que ce sont des sous espaces vectoriels de $M_3(\mathbb{R})$ dont on déterminera des bases.