

## DEVOIR ASSOCIÉ AU TD1'

**Exercice 1.** *Fin de l'exercice de TD.*

Dans les expressions suivantes, les domaines auxquels sont astreintes les variables ne sont pas indiqués. Pour chaque expression :

- Indiquer un domaine possible pour chacune des variables.
- Dire s'il s'agit d'un nom ou d'un énoncé et indiquer ses variables libres (parlantes) et ses variables liées (muettes). Pour les variables muettes, indiquer le signe mutificateur.
- Donner si possible un synonyme ne comportant pas de variable muette.

1.  $x \mapsto \{t \mid f(t) = x\}$  (vous transcrirez en plus en français l'expression obtenue).

**Correction** Il y a trois variables  $x, t$  et  $f$ . On peut astreindre les variables  $x$  et  $t$  à  $\mathbb{R}$  et la variable  $f$  à l'ensemble des fonctions de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$ . L'expression se lit en français "l'ensemble des  $t$  tels que  $f(t) = x$ ", c'est un nom (le nom d'un ensemble). La variable  $t$  est muette (comme l'indique l'écriture  $\{t \mid \text{blabla}(t)\}$ ), et les variables  $x$  et  $f$  sont libres.

Un synonyme ne comportant pas de variable muette est  $f^{-1}(\{x\})$ , cette notation a été introduite précisément pour désigner cet ensemble (et donc pour avoir un synonyme sans variable muette!). On la lit "l'image réciproque de l'ensemble  $\{x\}$  par  $f$ " (l'ensemble  $\{x\}$  est réduit à un élément ( $x$ ), on dit que c'est un *singleton*). Si vous ne connaissez pas cette terminologie, je vous conseille d'aller voir à la bibliothèque.

2. L'ensemble des points  $M$  du plan vérifiant  $MA = MB$ .

**Correction** Il y a trois variables  $M, A$  et  $B$ . On peut les astreindre à l'ensemble des points du plan. L'expression est un nom. La variable  $M$  est muette pour la même raison que précédemment (et le rôle de mutificateur est joué, comme au-dessus, par "l'ensemble des ... tels que"), les variables  $A$  et  $B$  sont libres. Un synonyme sans variable muette est "l'ensemble des points du plan à égale distance de  $A$  et  $B$ ", un autre synonyme est "la médiatrice du segment  $[AB]$ ".

3.  $\sum_{k=1}^n k$ .

**Correction** Il y a deux variables  $n$  et  $k$ . Elles peuvent être astreintes à l'ensemble des entiers naturels non nuls (mais attention, le symbole  $\sum$  impose certaines restrictions! Voir à la bibliothèque). La variable  $n$  est libre, et la variable  $k$  muette (le "mutificateur" est  $\sum$ , un indice de sommation est une variable muette). Il s'agit d'un nom, c'est le nom d'un nombre entier, en l'occurrence  $\frac{n(n+1)}{2}$ . Justement, " $\frac{n(n+1)}{2}$ " est un synonyme sans variable muette!

Une remarque générale : vous voyez que les variables libres interviennent toujours dans les synonymes sans variables muettes. C'est bien normal, et on ne peut pas s'en passer, puisque par définition les variables libres sont celles sur lesquelles l'énoncé a quelque chose à dire quand c'est une proposition. Quand c'est un nom, l'objet nommé dépend des variables libres (on peut assigner une valeur à chacune de ces variables et obtenir un objet différent à chaque fois : dans le troisième cas ci-dessus, on obtient un entier différent selon la valeur de  $n$ ).

On ne peut donc pas supprimer les variables libres dans un énoncé sans variable muette! Par contre, par définition, un tel énoncé ne comporte plus de variable muette.