Université Paris Diderot **Premier semestre 2011-2012**
Licence 1ère année **LM1 - Langage Mathématique**

Exercices (DM) de la feuille de TD1
éléments de corrections

A propos de l'exercice 4 de la feuille TD1

Synonymes ou non (justifier).

(a) Si l'on considère la variable X astreinte à $\mathbb{R}$, alors « $X^4 - 1 = 0$ » est synonyme de « $X = 1$ ou $X = -1$ », car $X^4 - 1 = (X^2 + 1)(X - 1)(X + 1)$.
Si l'on considère la variable X astreinte à $\mathbb{C}$, alors « $X^4 - 1 = 0$ » n'est pas synonyme de « $X = 1$ ou $X = -1$ », car $X^4 - 1 = (X + i)(X - i)(X - 1)(X + 1)$.

(b) « La dérivée de la fonction exponentielle en 0 » est synonyme de « 1 », car $e'(0) = e^0 = 1$.

(c) « $x - 3$ » n'est pas synonyme de « $y - 3$ » : si j'assigne à la variable x la valeur 3 et à la variable y la valeur 5, $x - 3$ et $y - 3$ ne désignent pas le même nombre (la variable x est libre dans l'expression $x - 3$).

(d) « $LM = AE$ » n'est pas synonyme de « le quadrilatère $LAME$ est un rectangle », les rectangles ne sont pas les seuls quadrilatères dont les diagonales sont de même longueur.

(e) « L'ensemble des entiers naturels impairs » n'est pas synonyme de « $\{2n - 1 \mid n \in \mathbb{N}\}$ », car pour $n = 0$, $2n - 1 = -1$ et -1 n'est pas un entier naturel impair.

(f) « L'équation $x^2 + 3x + b = 0$ d'inconnue réelle x » est synonyme de « L'equation $y^2+3y+b = 0$ d'inconnue réelle y », car la variable x est muette dans « L'équation $x^2 + 3x + b = 0$ d'inconnue réelle x » (le signe mutificateur est "équation...d'inconnue...x" ici), on peut donc la remplacer par un autre nom de variable non déjà utilisé.

(g) « $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^2$ » n'est pas synonyme de « $\dfrac{n(n+1)(2n-1)}{6}$ », en effet pour $n = 2$, on a que $\displaystyle\sum_{k=1}^{2} k^2 = 5$ est différent de $\dfrac{2(2+1)(2 \times 2 - 1)}{6} = 3$.
Remarque : la formule $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ est vraie par contre, si on remplace donc la deuxième expression de la question par « $\dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ », les deux expressions sont synonymes et cela se prouve par récurrence.

A propos de l'exercice 5 de la feuille TD1

« Il n'existe pas de nombre réel strictement positif plus petit que tous les nombres réels strictement positifs. »

(a) Il semble naturel ici de vouloir introduire deux variables : une première que l'on nomme par exemple a représentant "le nombre réel strictement positif plus petit que tous les autres réels strictement positifs" et une deuxième variable x représentant justement "tous les autres nombres strictement positifs".

L'énoncé « Il n'existe pas de nombre réel strictement positif plus petit que tous les nombres réels strictement positifs. » est la négation de l'énoncé « Il existe un nombre réel strictement positif plus petit que tous les nombres réels strictement positifs. ». Ce deuxième énoncé s'écrit :

$$\exists a \in \mathbb{R}_+^* \, \forall x \in \mathbb{R}_+^* \; a \leqslant x$$

L'énoncé « Il n'existe pas de nombre réel strictement positif plus petit que tous les nombres réels strictement positifs. » s'écrit donc :

$$NON(\exists a \in \mathbb{R}_+^* \, \forall x \in \mathbb{R}_+^* \; a \leqslant x)$$

qui est synonyme de :

$$\forall a \in \mathbb{R}_+^* \, \exists x \in \mathbb{R}_+^* \; a > x$$

(b) Montrer la non existence d'un élément vérifiant une propriété est quelquechose d'assez courant en mathématiques. Une méthode classique pour prouver le résultat consiste à raisonner par l'absurde : on suppose que l'élément existe et vérifie la propriété, et on essaye d'obtenir une contradiction sur la propriété de l'élément . Cela permet de conclure que l'élément n'existe pas. Appliquons ce raisonnement ici :
Supposons qu'il existe $a \in \mathbb{R}_+^*$, vérifiant :

$$\text{pour tout } x \in \mathbb{R}_+^*,\; a < x.$$

Alors on a $\frac{a}{2} \in \mathbb{R}_+^*$ et d'après la propriété vérifiée par a on a $a < \frac{a}{2}$.
Or, puisque $a \in \mathbb{R}_+^*$, on a $a \geqslant \frac{a}{2}$, d'où une contradiction.
Un tel a n'existe donc pas.