Devoir associé au TD0.

Exercice 1. *Laissé en chemin en TD.*

Les assertions suivantes sont-elles bien formulées, vraies, fausses ? Si une assertion paraît mal formulée, proposer une ou plusieurs reformulations possibles, et indiquer si chacune des assertions obtenues est vraie ou fausse.

On note A l'ensemble des nombres réels x tels que $|x+2| > 3$.

1. Pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, il existe $x \in A$ tel que $x > n$.
2. Pour tout entier $n \geqslant 1$, il existe $x \in A$ tel que $0 < x < \dfrac{3}{n}$.
3. Il existe un élément $x \in A$ tel que pour tout n, on ait $x < n$.

Exercice 2. *Variables muettes et substitutions.*

Dans un premier temps, on ne se demande pas si les propositions suivantes sont vraies ou fausses. Lesquelles ont la même signification logique ? Dans un second temps seulement, lesquelles sont vraies, lesquelles sont fausses ?

a. Pour $x = -1$, $x^2 + x + 1 = 1$.
b. $(-1)^2 + (-1) + 1 = 1$.
c. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $x^2 + x + 1 = 1$.
d. Il existe $x \in \mathbb{R}$, $x^2 + x + 1 = 1$.
e. Il existe $z \in \mathbb{R}$, $z^2 + z + 1 \neq 1$.
f. Pour $\Omega = -1$, $\Omega^2 + \Omega + 1 = 1$.
g. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $x^2 + x + 1 \neq 1$.
h. Pour $y = -2$, $y^2 + y + 1 = 1$.
i. Pour $\Phi = -1$, $\Delta^2 + \Delta + 1 = 1$.
j. L'équation $\theta^2 + \theta + 1 = 1$ admet une solution réelle.
k. L'équation $x^2 + x + 1 = 1$ n'admet pas de solution réelle.
l. L'ensemble des solutions de $x^2 + x + 1 = 1$ est $\{-1\}$.
m. -1 est solution de $x^2 + x + 1 = 1$.

Exercice 3. *Le but est de bien rédiger !*

1. Montrer que la somme des carrés de deux entiers pairs est divisible par 4.
2. Montrer que la somme de deux entiers impairs consécutifs est toujours un multiple de 4.
3. La somme de deux entiers impairs est-elle toujours un multiple de 4 ?

Exercice 4. *Sur quels objets mathématiques portent vraisemblablement les énoncés suivants ? Quelles propriétés de ces objets traduisent-ils ?*

On écrira ensuite les définitions formelles de ces propriétés, sous forme d'énoncés mathématiques sans ambiguïté [1].

1. Pour tout entier naturel non nul p, si p divise n alors $p = 1$ ou $p = n$.
2. Il existe un réel a tel que pour tout réel x , $f(x) \leqslant f(a)$.
3. Tout intervalle ouvert contenant l contient toutes les valeurs $f(x)$ pour x assez grand.

1. Si vous n'avez jamais entendu parler de ces propriétés, n'hésitez pas à demander autour de vous ou à aller voir à la bibliothèque ! C'est le bon moment...