Devoir associé au TD0 : corrigé.

Exercice 1. *Laissé en chemin en TD.*

Les assertions suivantes sont-elles bien formulées, vraies, fausses ? Si une assertion paraît mal formulée, proposer une ou plusieurs reformulations possibles, et indiquer si chacune des assertions obtenues est vraie ou fausse.

On note A l'ensemble des nombres réels x tels que $|x+2| > 3$.

1. Pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, il existe $x \in A$ tel que $x > n$.

Correction
Cette assertion est bien formulée. Elle signifie en français que *pour tout entier naturel* n*, il existe un élément de* A *strictement plus grand que* n. Et elle est vraie : soit $n \in \mathbb{N}$ et $x = n+3$. Alors $x+2 \geq 5$, en particulier $x+2$ est positif et $|x+2| = x+2 \geq 5$, donc $x \in A$. Nous avons bien $x > n$.
Noter la démarche, qu'il est essentiel de bien retenir : on fixe un entier n au hasard, puis on *exhibe* un élément x qui convient. C'est une des manières usuelles de montrer les assertions du type "pour tout (...), il existe (...) tel que (...)".
Pour comprendre les énoncés, il faut les lire tranquillement et voir ce qu'on vous demande !

2. Pour tout entier $n \geqslant 1$, il existe $x \in A$ tel que $0 < x < \dfrac{3}{n}$.

Correction
Cette assertion est bien formulée : l'ensemble auquel est astreinte la variable n est précisé sans ambiguïté, c'est $\mathbb{N}^\star$, et celui auquel est astreinte la variable x l'est aussi, c'est A.
Elle est fausse : comme certains d'entre vous l'ont écrit, la raison pour laquelle elle est fausse est que A ne contient pas d'élément "aussi près de zéro qu'on veut". Il faut donner un argument précis, et pour montrer qu'une assertion est fausse, une manière efficace est de donner un contre-exemple.
Envisageons $n = 6$. Supposons qu'il existe $x \in \mathbb{R}$ tel que $0 < x < \dfrac{3}{n}$. Alors $x \in]0, 1/2[$ et $|x+2| = x+2 \in]2, 5/2[$, ce qui montre que x ne peut pas appartenir à A. Il n'existe donc pas de $x \in A$ tel que $0 < x < \dfrac{3}{n}$, ce qui prouve que l'assertion n'est pas vraie.

3. Il existe un élément $x \in A$ tel que pour tout n, on ait $x < n$.

Correction
Cette assertion est mal formulée : on ne précise pas à quel ensemble est astreint la variable n.
Soit B l'ensemble auquel la variable n est astreinte : l'assertion signifie qu'il existe un élément de A qui soit plus petit que tous les éléments de B. Sa valeur de vérité dépend manifestement de l'ensemble B !
Supposons par exemple que la variable n soit astreinte à $\mathbb{N}$. Alors l'assertion est vraie : l'élément $x = -10$ appartient à A et pour tout $n \in \mathbb{N}$, nous avons bien $x < 0 \leq n$.
En revanche, si la variable est astreinte à $\mathbb{R}$, on est en train de chercher un élément de A qui soit plus petit que tous les réels, ce qui n'est manifestement le cas d'aucun élément de A qui est un ensemble de réels. Plus précisément, soit $x \in A$. Alors $n = x - 1 \in \mathbb{R}$ est est strictement inférieur à x, donc il n'est pas vrai que x soit strictement inférieur à n.
Vous voyez, en général, on ne peut pas dire grand chose d'une assertion mal formulée ! Et pour pouvoir en dire quelque chose, il faut préciser les ensembles auxquels sont astreintes toutes les variables : j'ai donné deux reformulations possibles, l'une donnait un énoncé vrai, l'autre un énoncé faux.

Exercice 2. *Variables muettes et substitutions.*

Dans un premier temps, on ne se demande pas si les propositions suivantes sont vraies ou fausses. Lesquelles ont la même signification logique ? Dans un second temps seulement, lesquelles sont vraies, lesquelles sont fausses ?

a. Pour $x = -1$, $x^2 + x + 1 = 1$.
b. $(-1)^2 + (-1) + 1 = 1$.
c. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $x^2 + x + 1 = 1$.
d. Il existe $x \in \mathbb{R}$, $x^2 + x + 1 = 1$.
e. Il existe $z \in \mathbb{R}$, $z^2 + z + 1 \neq 1$.
f. Pour $\Omega = -1$, $\Omega^2 + \Omega + 1 = 1$.
g. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $x^2 + x + 1 \neq 1$.
h. Pour $y = -2$, $y^2 + y + 1 = 1$.
i. Pour $\Phi = -1$, $\Delta^2 + \Delta + 1 = 1$.
j. L'équation $\theta^2 + \theta + 1 = 1$ admet une solution réelle.
k. L'équation $x^2 + x + 1 = 1$ n'admet pas de solution réelle.
l. L'ensemble des solutions de $x^2 + x + 1 = 1$ est $\{-1\}$.
m. -1 est solution de $x^2 + x + 1 = 1$.

Correction

Cet exercice est important et si écrire la solution est très rapide, il est essentiel d'avoir bien réfléchi aux raisons et aux commentaires que je vais détailler ici. Je vous les donne volontairement dans un certain désordre pour que vous compreniez

Les propositions (a), (b), (f) et (m) ont la même signification. Elles sont d'ailleurs vraies, bien sûr, et pour le vérifier, il suffit de vérifier que l'une d'entre elles est vraie.

Vous noterez que la raison pour laquelle (a) et (f) sont logiquement équivalentes, c'est que *x est une variable muette dans l'énoncé (a)*. (b) en est une reformulation sans variable muette, tandis que m est une manière maladroite de dire la même chose avec le terme "équation" caché.

La proposition (d), en revanche, n'a pas la même signification que les précédentes : elle indique juste l'existence d'un réel qui vérifie l'équation, mais ne précise pas qu'il s'agit de (-1). Elle est vraie aussi, et d'ailleurs pour le montrer il suffit d'exhiber un réel qui vérifie l'équation, par exemple (-1) (mais ce n'est qu'un exemple). Il est important que vous reteniez que (d) et (j) ont la même signification.

De même, la proposition (l) n'a pas la même signification que (a), et pas la même signification que (d) : là où (d) affirmait "moins de choses que (a)", (l) en affirme plus : elle affirme que (-1) est la seule solution de l'équation ! Or, il est clair que 0 convient. Donc cette proposition est fausse.

La proposition (k) est la négation de l'assertion (d), et elle a la même signification que l'assertion (g) . Elle est forcément fausse, puisque (d) est vraie !

Quant à (c), elle n'a aucun rapport avec les précédentes et est bien sûr fausse, puisque $2^2 - 2 + 1 = 3 \neq 1$. Elle est la négation de l'assertion (e), qui pour cette raison est vraie.

(h) n'a rien à voir non plus avec les assertions précédentes, si ce n'est que savoir qu'elle est fausse (elle l'est, bien sûr) permet de savoir que (e) est vraie et (c) fausse, par exemple. Mais elle n'a la même signification qu'aucune des deux !

Enfin, (i) n'a aucun sens, et on ne peut rien dire d'une affirmation qui n'a aucun sens ! Ni qu'elle est vraie, ni qu'elle est fausse !

Exercice 3. *Le but est de bien rédiger !*

1. Montrer que la somme des carrés de deux entiers pairs est divisible par 4.

Correction
Soit n_1 un entier pair (noter que $n_1 \in \mathbb{Z}$ a priori). Il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $n_1 = 2k_1$. Soit n_2 un autre entier pair. Il existe $k_2 \in \mathbb{Z}$ tel que $n_2 = 2k_2$.
Nous avons : $n_1^2 + n_2^2 = 4(k_1^2 + k_2^2)$, où $k_1^2 + k_2^2$ est entier. Cela prouve que $n_1^2 + n_2^2$ est divisible par 4.
Il est essentiel que vous compreniez qu'il n'y a pas besoin d'écrire plus que cela pour démontrer la proposition, mais que chacun des mots est essentiel ! Il faut préciser où vit chacune des variables introduites, sous peine de perdre le sens du mot "divisible", et pour que la démonstration soit une démonstration (c'est-à-dire qu'elle soit générale), il faut envisager

la somme des carrés de deux entiers pairs *quelconques*, c'est-à-dire partir de deux entiers pairs quelconques, effectuer la somme de leurs carrés et voir si elle vérifie la propriété envisagée.

2. Montrer que la somme de deux entiers impairs consécutifs est toujours un multiple de 4.

Correction
Une somme de deux entiers impairs consécutifs est un entier de la forme $n + (n + 2)$, où n est un entier impair.
Soit n un entier impair. Il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $n = 2k + 1$. Mais alors $n + (n + 2) = 4k + 4 = 4(k + 1)$, où $k + 1$ est un entier (relatif). Cela signifie que $n + (n + 2)$ est divisible par 4, ce qu'il fallait démontrer.

3. La somme de deux entiers impairs est-elle toujours un multiple de 4 ?

Correction
Non, la somme de deux entiers impairs n'est pas *toujours* un multiple de 4 : 1 est un entier impair, 5 est un autre entier impair et $1 + 5 = 6$ n'est pas un multiple de 4.
Noter que cela suffit à achever la résolution de l'exercice : pour prouver qu'une proposition est fausse, il suffit de donner un contre-exemple. Certains parmi vous ont cherché les conditions sur deux entiers impairs pour que leur somme soit un multiple de 4, puis constaté (sans le dire) que ces conditions n'étaient pas toujours vérifiées : c'est louable, mais c'est faire plus que ce qu'on vous demande (et si vous ne dites pas à un moment pourquoi vous répondez à la question posée, vous y perdrez par rapport à une solution plus courte !).

Exercice 4. *Sur quels objets mathématiques portent vraisemblablement les énoncés suivants ? Quelles propriétés de ces objets traduisent-ils ?*

On écrira ensuite les définitions formelles de ces propriétés, sous forme d'énoncés mathématiques sans ambiguïté.

1. Pour tout entier naturel non nul p, si p divise n alors $p = 1$ ou $p = n$.

Correction
Cet énoncé semble porter sur un entier relatif n (dans la mesure où la notion de divisibilité concerne les entiers relatifs). Il signifie que n est premier.
La lettre "p" y désigne une variable muette astreinte à l'ensemble des entiers naturels. L'énoncé ne porte pas dessus ! La meilleure preuve est que la signification proposée ne la fait plus intervenir.

2. Il existe un réel a tel que pour tout réel x , $f(x) \leqslant f(a)$.

Correction
Comme précédemment, les variables x et a sont des variables muettes astreintes à l'ensemble des nombres réels. L'énoncé semble porter sur une fonction f définie sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou dans un sous-ensemble de $\mathbb{R}$ (tout simplement parce qu'on peut comparer les valeurs prises par la fonction en deux points différents).
Une reformulation ne devrait, idéalement, faire intervenir que la variable (libre) f ! En voici une : l'énoncé signifie que f *admet un maximum global*. L'énoncé ne dit pas où il est, ni quelle est sa valeur !

3. Tout intervalle ouvert contenant l contient toutes les valeurs $f(x)$ pour x assez grand.

Correction Cet énoncé exprime le fait que f tend vers l en $+\infty$. Les énoncés suivants sont équivalents à la phrase ci-dessus.
   (a) $\lim_{x\to+\infty} f(x) = l$.
   (b) f tend vers l en $+\infty$.

(c) $f(x)$ tend vers l lorsque x tend vers $+\infty$. *Bien faire attention aux différences entre cette phrase et celle au-dessus !*

(d) La limite de f en $+\infty$ est l.

Attention à certaines erreurs courantes : on a pu voir dans dans certaines copies $f(x) < l$ pour x assez grand. C'est faux, la fonction f peut osciller autour de sa limite l. (regardez par exemple la fonction $x \mapsto \frac{\sin(x)}{x}$, qui tend vers 0 en $+\infty$).