

INTERROGATION 1 - *Correction*

EXERCICE 1. Pour chacune des expressions suivantes :

- (i) Indiquer s'il s'agit d'un nom ou d'un énoncé.
 - (ii) Pour chaque variable, spécifier un domaine d'astreinte possible et indiquer si elles sont libres (parlantes) ou muettes (liées). Dans le cas d'une variable muette, exhiber son signe mutificateur.
- a. $\int_0^\pi t x dt$
 - b. $x \mapsto \int_x^{-5} z^2 dz$
 - c. $\int_2^3 f(y) dy$
 - d. L'ensemble des points M du plan tels que $OM = 4$.
 - e. $\{n \mid \exists k \in \mathbb{N} \ n = 2k\}$
 - f. $\{x \mid 9x^2 - 3x + 1 = 0\}$
 - g. L'équation $18ay - 57y^2 = 0$ d'inconnue réelle y n'admet aucune solution.
 - h. Quel que soit x réel, $x^2 > a$.
 - i. $\pi x^2 + 3bx = 1$
 - j. $\lim_{t \rightarrow +\infty} f(t + d)$
- a. t est une variable muette suite au mutificateur « $\int \dots d \dots$ ». t peut être astreinte à \mathbb{R} .
 x est libre, et peut être astreinte à \mathbb{R} , à \mathbb{Z} , à $\mathbb{Q} \dots$
 - b. x est une variable muette suite au mutificateur « $\dots \mapsto \dots$ ». x peut être astreinte à \mathbb{R} ,
à \mathbb{Z} , à $\mathbb{Q} \dots$
 z est une variable muette suite au mutificateur « $\int \dots d \dots$ ». z peut être astreinte à \mathbb{R} .
 - c. y est une variable muette suite au mutificateur « $\int \dots d \dots$ ». y peut être astreinte à \mathbb{R} ,
à \mathbb{Z} , à $\mathbb{Q} \dots$
 f est une variable libre, et peut être astreinte à l'ensemble des fonctions de \mathbb{R} ou \mathbb{Z} ou \mathbb{Q} (selon le domaine d'astreinte de y) dans \mathbb{R} .
 - d. M est une variable muette suite au mutificateur « L'ensemble des points \dots tels que \dots ». M est astreinte à l'ensemble des points du plan.
 O est libre et peut être astreinte à l'ensemble des points du plan.
 - e. n est une variable muette suite au mutificateur « $\{\dots \mid \dots\}$ ». n peut être astreinte à \mathbb{N} .
 k est une variable muette suite au mutificateur « $\exists \dots \dots$ ». k est astreinte à \mathbb{N} .
 - f. x est une variable muette suite au mutificateur « $\{\dots \mid \dots\}$ ». x peut être astreinte à \mathbb{N} , à \mathbb{Q} , à \mathbb{R} , à $\mathbb{C} \dots$

- g. y est une variable muette suite au mutificateur « L'équation ... d'inconnue réelle ... ».
 y est astreinte à \mathbb{R} .
 a est libre, et peut être astreinte à \mathbb{R} , à \mathbb{Z} , à \mathbb{Q} ...
- h. x est une variable muette suite au mutificateur « Quel que soit ..., ... ». x est astreinte à \mathbb{R} .
 a est libre, et peut être astreinte à \mathbb{R} , à \mathbb{Z} , à \mathbb{Q} ...
- i. x et b sont libres, et peuvent être astreintes à \mathbb{R} , à \mathbb{Z} , à \mathbb{Q} ...
- j. t est muette suite au mutificateur « $\lim_{\dots \rightarrow +\infty} \dots$ ». t est astreinte à \mathbb{R} .
 d est libre, et peut être astreinte à \mathbb{R} , à \mathbb{Z} , à \mathbb{Q} ...
 f est libre, et peut être astreinte à l'ensemble des fonctions de \mathbb{R} dans \mathbb{R} .

EXERCICE 2. Pour les expressions a., d., e. et f. de l'exercice précédent, écrire une expression synonyme sans variable muette.

$$a. \int_0^\pi t x dt = x \left[\frac{t^2}{2} \right]_0^\pi = x \frac{\pi^2}{2}$$

Un synonyme de a. sans variable muette est donc « $x \frac{\pi^2}{2}$ ».

d. Un synonyme de d. sans variable muette est « le cercle de centre O et de rayon 4 ».

e. Un synonyme de e. sans variable muette est « l'ensemble des nombres pairs ».

f. Considérons l'équation $9x^2 - 3x + 1 = 0$.

$$\Delta = (-3)^2 - 4 * 9 * 1 = -27$$

Le synonyme dépend donc de l'ensemble auquel x est atreinte, il faut être cohérent avec l'exercice prècédent.

Si x est astreinte à \mathbb{R} , il n'y a pas de solution à l'équation. Un synonyme est alors « l'ensemble vide », noté « $\{ \}$ » ou « \emptyset ».

Si x est astreinte à \mathbb{C} , il y a deux solutions : $x_1 = \frac{1-i\sqrt{3}}{6}$ et $x_2 = \frac{1+i\sqrt{3}}{6}$.

Un synonyme est alors « $\left\{ \frac{1-i\sqrt{3}}{6}, \frac{1+i\sqrt{3}}{6} \right\}$ ».

EXERCICE 3. Dans l'expression suivante, la variable x admet à la fois une/des occurrence(s) libre(s) et une/des occurrence(s) muette(s).

Remplacer la ou les occurrence(s) muette(s) par une nouvelle variable et justifier pourquoi la nouvelle expression est synonyme de la précédente.

$$6x = \int_0^3 x^2 f(x) dx$$

Dans cette expression, il y a un unique mutificateur $\int \dots d \dots$ qui porte uniquement sur les variables à l'intérieur de l'intégrale. Ainsi, l'occurrence de x du membre de gauche de l'équation est libre, et les occurrences de x du membre de droite sont liées par le mutificateur. On peut remplacer les occurrences muettes de x par une nouvelle variable et obtenir l'expression suivante qui est synonyme de la précédente :

$$6x = \int_0^3 y^2 f(y) dy$$