

## CONTRÔLE CONTINU, CHAPITRE 1.

### Exercice 1.

1. Dans les propositions suivantes, les ensembles auxquels les variables sont astreintes ne sont pas précisés. Trouver dans chaque cas une déclaration de variables pour laquelle la proposition est vraie, et réécrire la proposition en astreignant les variables en conséquence.

(a)  $\{x \mid \exists y, x = y^2\} = [0, +\infty[.$

(b) Si  $ab \leq ac$ , alors  $b \leq c$ .

(c) Pour tout  $x$ , il existe  $z$  tel que  $x = 7z$ .

2. Pour chaque énoncé, donner un exemple de déclaration de variables donnant lieu à une proposition fausse (on ne demande pas de réécrire les énoncés).

### Exercice 2.

1. On considère les expressions  $\mathcal{A}$  et  $\mathcal{B}$  suivantes, où la variable  $f$  est astreinte à l'ensemble des fonctions de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$  et les variables  $x, h$  sont astreintes à l'ensemble des nombres réels :

$$\mathcal{A} : \left\{ x \in \mathbb{R}, \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = 0 \right\}$$

$$\mathcal{B} : \left\{ x \in \mathbb{R}, \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = 0 \right\} = \mathbb{R}$$

- (a) Ces expressions sont-elles des noms ou des propositions ?  
(b) Préciser les variables libres et les variables muettes dans ces expressions.  
(c) Pour chacune des deux expressions, proposer un énoncé synonyme ne comportant aucune variable muette.
2. On considère l'énoncé  $\mathcal{E}$  suivant, dans lequel les variables  $a, b$  et  $x$  sont astreintes à l'ensemble  $\mathbb{R}$  des nombres réels :

$$\mathcal{E} : \quad \forall x (ax + b \neq 0)$$

- (a) Indiquer les variables libres et les variables muettes de l'énoncé  $\mathcal{E}$ .  
(b) Donner une valeur de  $a$  et une valeur de  $b$  pour lesquelles l'énoncé  $\mathcal{E}$  est faux.  
(c) Donner un énoncé synonyme de  $\mathcal{E}$  ne comportant aucune variable muette.

### Exercice 3.

1. Soient  $a, b, c$  des éléments de  $\mathbb{C}$ . Les énoncés suivants sont-ils synonymes ? Justifier la réponse.

« L'équation  $ax^2 + bx + c$ , d'inconnue complexe  $x$ , admet deux solutions » ;

$$\text{« } b^2 - 4ac > 0 \text{ »}$$

2. Réécrire sans variables muettes la proposition suivante :

« Pour tout entier relatif  $p$  et tout entier naturel non nul  $q$ ,  $\sqrt{2} \neq \frac{p}{q}$ . »