Contrôle continu, chapitre 1.

Exercice 1.

1. Dans les propositions suivantes, les ensembles auxquels les variables sont astreintes ne sont pas précisés. Trouver dans chaque cas une déclaration de variables pour laquelle la proposition est vraie, et réécrire la proposition en astreignant les variables en conséquence.

   (a) $\{x \mid \exists y,\ x = y^2\} = [0, +\infty[$.

   Correction Pour obtenir une proposition vraie, on peut astreindre la variable x à $\mathbb{R}$ et la variable y à $\mathbb{R}$. La proposition se réécrit alors :

   $$\{x \in \mathbb{R} \mid \exists y \in \mathbb{R},\ x = y^2\} = [0, +\infty[.$$

   (b) Si $ab \leq ac,$ alors $b \leq c$.

   Correction Pour obtenir une proposition vraie, on peut astreindre la variable a à $\mathbb{R}^+$ et les variables b et c à $\mathbb{R}$. La proposition se réécrit alors :

   Pour tout $a \in \mathbb{R}^+$ et pour tout $(b, c) \in \mathbb{R}^2$, si $ab \leq ac,$ alors $b \leq c$.

   Note : les réécritures suivantes sont aussi possibles, parmi bien d'autres :

   Pour tout $(a, b, c) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^2$, si $ab \leq ac,$ alors $b \leq c$.

   Pour tout $(a, b, c) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^2$, $(ab \leq ac)$ implique $(b \leq c)$.

   Pour tout réel positif a et pour tous réels b et $c, (ab \leq ac)$ implique $(b \leq c)$.

   (c) Pour tout x, il existe z tel que $x = 7z$.

   Correction Pour obtenir une proposition vraie, on peut astreindre la variable x à $\mathbb{R}$ et la variable z à $\mathbb{R}$. La proposition se réécrit alors :

   Pour tout $x \in \mathbb{R},$ il existe $z \in \mathbb{R}$ tel que $x = 7z$.

2. Pour chaque énoncé, donner un exemple de déclaration de variables donnant lieu à une proposition fausse (on ne demande pas de réécrire les énoncés).

   Correction Les déclarations suivantes donnent lieu à des propositions fausses :
   Pour (a), astreindre x à $\mathbb{C}$ et y à $\mathbb{C}$ (autre exemple : astreindre x à $\mathbb{N}$ et y à $\mathbb{N}$).
   Pour (b), astreindre a à $\mathbb{R}^-$ et b, c à $\mathbb{R}$.
   Pour (c), astreindre x à $\mathbb{Z}$ et z à $\mathbb{Z}$ (autres exemples : astreindre x à $\mathbb{R}$ et z à $\mathbb{Z}$, ou x à $\mathbb{R}^+$ et z à $\mathbb{R}^-$).

Quelques remarques sur cet exercice (où j'ai voulu vous montrer le genre de rédaction "minimale attendue", je serai plus disert sur les autres) : comme vous le voyez, il n'y a pas qu'une déclaration de variables possible pour obtenir un énoncé vrai (et pas qu'une possible pour qu'il soit faux). Certains d'entre vous ont écrit des choses comme "x doit être astreinte à $\mathbb{R}$" ou "donc $x \in \mathbb{R}$: vous voyez que cela n'a pas de sens, n'est-ce pas ?

Par ailleurs, nous reviendrons longuement sur l'usage des quantificateurs "pour tout" et "il existe" et des symboles "$\forall$ et $\exists$". Beaucoup d'entre vous les ont utilisés à tort et à travers pour cet exercice.

Je vous encourage (à titre d'exercice préparatoire à ce travail) à écrire la négation des trois énoncés en effectuant une déclaration de variables proposée à la deuxième question : vous obtenez ainsi des énoncés vrais qui signifient que l'énoncé initial est faux avec cette déclaration de variables.

Exercice 2.

1. On considère les expressions $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ suivantes, où la variable f est astreinte à l'ensemble des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et les variables x, h sont astreintes à l'ensemble des nombres réels :

$$\mathcal{A} : \left\{ x \in \mathbb{R}, \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = 0 \right\}$$

$$\mathcal{B} : \left\{ x \in \mathbb{R}, \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = 0 \right\} = \mathbb{R}$$

(a) Ces expressions sont-elles des noms ou des propositions ?

Correction
L'expression $\mathcal{A}$ est un nom (elle définit un sous-ensemble de l'ensemble des nombres réels) et l'expression $\mathcal{B}$ est une proposition (c'est l'affirmation que cet ensemble (formé de nombres réels) est $\mathbb{R}$ tout entier).
Remarque : j'ai lu plusieurs "la proposition $\mathcal{A}$ est un nom et la proposition $\mathcal{B}$ est une proposition". C'est bien sûr absurde d'écrire une chose pareille et je n'ai pu que compter zéro. Il est essentiel de vous relire pour éviter de perdre très bêtement des points de la sorte !

(b) Préciser les variables libres et les variables muettes dans ces expressions.

Correction Cette question n'a reçu aucune réponse complète et il est crucial que vous vous entraîniez tous à reconnaître les variables dans une expression, celles qui sont muettes et celles qui sont libres. Je vais essayer de vous l'expliquer en détail pour cette question, mais je vous conseille très vivement de vous exercer sur les exercices des TD précédents et des partiels des années précédentes. Vous pouvez bien sûr me demander des explications, un point collectif en TD ou me soumettre ce que vous avez fait pour que je regarde en fin de TD (cela ne vaut pas que pour les variables muettes, mais pour tout le contenu du cours/TD !).
Dans chacune de ces expressions interviennent les variables x, h et f :

– la variable x est une variable muette. Ce sont les accolades qui l'indiquent et à ce titre elles méritent le glorieux nom de "mutificateur" : de manière générale, si E est un ensemble, une expression de la forme

$$\{x \in E \ , \ \text{blabla}(x)\}$$

(la virgule se lit "tels que", pour marquer le coup on utilise souvent une barre et j'en ai pris l'habitude avec vous) est un nom qui désigne un sous-ensemble de E, la variable x n'est là que pour permettre de décrire les propriétés des éléments de E. Si on écrit

$$\{y \in E \ , \ \text{blabla}(y)\}$$

(avec le même blabla), on est en train de décrire le même ensemble !

– la variable h est une variable muette. Ce qui l'indique est la présence de "lim", qui mérite ici le titre de mutificateur. De manière générale, la limite d'une fonction est un nombre : si $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est une fonction, l'expression

$$\lim_{h\to 0} \varphi(h)$$

est un nom qui désigne la limite de φ en zéro lorsqu'elle existe [1]. Vous voyez bien qu'il n'y a plus de variable dans ce synonyme ! Un autre synonyme sans variable muette est $\lim_0 \varphi$.
Ici, il est clair que l'expression

$$\left\{x \in \mathbb{R}, \lim_{u\to 0} \frac{f(x+u)-f(x)}{u} = 0\right\}$$

désigne le même ensemble que celui qui est désigné par $\mathcal{A}$, ce qui est la manière la plus directe de le voir (ce test marche très souvent pour voir qu'une variable est muette, pensez-y ! !).

– la variable f est une variable libre. En effet, on peut envisager de donner une valeur à f : l'expression

$$\left\{x \in \mathbb{R}, \lim_{h\to 0} \frac{exp(x+h)-exp(x)}{h} = 0\right\}$$

a bien un sens, de même que l'expression

$$\left\{x \in \mathbb{R}, \lim_{h\to 0} \frac{(x+h)^2-(x)^2}{h} = 0\right\}.$$

Bien sûr, ces expressions sont deux noms qui désignent deux ensembles différents (l'ensemble vide dans le premier cas, l'ensemble $\{0\}$ dans le second).
Le fait qu'on puisse envisager de donner une valeur particulière à une variable (cette valeur étant bien sûr prise dans l'ensemble auquel la variable est astreinte) est caractéristique des variables libres (ou "parlantes"). Que penseriez-vous de l'expression

$$\left\{5 \in \mathbb{R}, \lim_{h\to 0} \frac{exp(5+h)-exp(5)}{h} = 0\right\}?$$

Cela n'a clairement pas de sens, parce que x est muette ! Et c'est aussi un bon critère pour voir si une variable est muette : essayez de lui donner une valeur dans l'ensemble auquel elle est astreinte.
Il est important de comprendre que le nom $\mathcal{A}$ désigne un *objet* (ici un ensemble) *qui dépend de la fonction* f, et que la proposition $\mathcal{B}$ *affirme quelque chose sur la fonction* f, qui peut être vrai ou faux selon la valeur de f. Par contre, la proposition $\mathcal{B}$ n'affirme rien du tout sur x, rien du tout sur h, et le nom $\mathcal{A}$ désigne un objet qui n'a rien à voir avec quoi que ce soit qui s'appellerait x ou h. C'est sur cette différence qu'est fondé le vocabulaire "muette/parlante" [2]

(c) Pour chacune des deux expressions, proposer un énoncé synonyme ne comportant aucune variable muette.

Correction Un synonyme de $\mathcal{A}$ sans variable muette est, par exemple, "l'ensemble des points de $\mathbb{R}$ où le nombre dérivé de f existe et est égal à zéro".

Un synonyme de $\mathcal{B}$ est "la fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et son nombre dérivé est nul en tout point de $\mathbb{R}$. Un autre synonyme est "la fonction f est constante" !

Il est essentiel de faire la remarque qui suit : quand vous venez d'identifier les variables muettes dans une expression et que vous souhaitez en proposer un synonyme sans variables muettes, il est essentiel que ces variables (ces *symboles*) n'y apparaissent plus ! Par exemple ici, peu importe la reformulation que vous proposez et le fait qu'il y

1. Ce nom n'a de sens que si φ admet une limite en zéro, ce qui est loin d'être le cas de toutes les fonctions.
2. Ou "liée/libre" : une variable "liée" est liée à la forme particulière qu'on a choisie pour l'expression mathématique dans laquelle elle apparaît, mais c'est purement contingent : on aurait pu choisir une autre manière d'écrire l'expression dans laquelle cette variable n'apparaît pas. Une variable "libre" n'est pas liée à la forme particulière choisie pour l'écriture, mais est un constituant indispensable de l'expression dans laquelle elle apparaît, et on peut "évaluer" l'expression en *choisissant* de donner une valeur particulière à cette variable (on est "libre de choisir la valeur de la variable") ; on obtiendra *a priori* des objets mathématiques (nom ou proposition) différents pour les différents choix.

ait une histoire de dérivées : il n'est pas question qu'il reste la lettre x ou la lettre h ou tout autre symbole que f, qui est la seule variable parlante dans les deux expressions !

2. On considère l'énoncé $\mathcal{E}$ suivant, dans lequel les variables a, b et x sont astreintes à l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels :

$$\mathcal{E} : \quad \forall x\ (ax + b \neq 0)$$

(a) Indiquer les variables libres et les variables muettes de l'énoncé $\mathcal{E}$.

Correction Dans l'énoncé $\mathcal{E}$ interviennent les variables x, a et b ; la variable x est muette (le quantificateur $\forall$ joue le rôle de mutificateur ; si vous ne voyez pas ce que je veux dire, je vous conseille d'appliquer les critères discutés ci-dessus) et les variables a et b sont libres (même remarque si vous ne comprenez pas).

(b) Donner une valeur de a et une valeur de b pour lesquelles l'énoncé $\mathcal{E}$ est faux.

Correction Si nous choisissons $a = 0$ et $b = 0$, alors l'énoncé $\mathcal{E}$ est faux. En effet, il s'agit alors de la proposition "$\forall x \in \mathbb{R}, 0x + 0 \neq 0$, et cette proposition est bien sûr fausse (ne serait-ce que parce que $0 * 1 + 0 = 0$).

(c) Donner un énoncé synonyme de $\mathcal{E}$ ne comportant aucune variable muette.
Correction Voici quelques synonymes de $\mathcal{E}$: "la droite de coefficient directeur a et d'ordonnée à l'origine b ne contient aucun point d'ordonnée nulle", "la droite de coefficient directeur a et d'ordonnée à l'origine b ne rencontre pas l'axe des abscisses", "la droite de coefficient directeur a et d'ordonnée à l'origine b est parallèle à l'axe des abscisses (et distincte de cet axe)", ou encore (plus subtil, voyez-vous pourquoi ?) "$b = 0$".

Exercice 3.

1. Soient a, b, c des éléments de $\mathbb{C}$. Les énoncés suivants sont-ils synonymes ? Justifier la réponse.

$$\text{« L'équation } ax^2 + bx + c, \text{ d'inconnue complexe } x, \text{ admet deux solutions »;}$$
$$\text{« } b^2 - 4ac > 0 \text{ »}$$

Correction
Ces énoncés ne sont pas synonymes : pour tous *nombres complexes* a, b et c, l'équation $ax^2 + bx + c + 0$ d'inconnue complexe x admet deux solutions *complexes* qui peuvent être confondues ; ces solutions sont distinctes si et seulement si $b^2 - 4ac \neq 0$.
Le second énoncé, lui, n'a de sens que si a et b sont réels et donne alors les conditions pour que l'équation $ax^2 + bx + c$ d'inconnue *réelle* x admette deux solutions *réelles distinctes* : elle admettra deux solutions complexes distinctes lorsque $b^2 - 4ac < 0$!
Il suffisait pour avoir les points de faire une phrase en français correct expliquant que l'inconnue étant astreinte à $\mathbb{C}$, l'équation avait toujours deux solutions, tandis que le second
Cet exercice cache la subtilité suivante (et la formulation n'aide pas) : le mouvement naturel est d'envisager que la question est *les énoncés sont-ils synonymes pour tous a, b et c ?* et c'est effectivement à cette question que vous avez répondu avec plus ou moins de succès. Pourtant, la première phrase de la question semble bien fixer a, b et c une fois pour toutes ; les deux énoncés n'ont alors aucune variable libre et sont tous deux soit vrais, soit faux. Il semble n'y avoir plus de circonstance et la notion de synonymie semble s'évanouir ! Nous reviendrons probablement sur cette subtilité au moment de parler de la démonstration, c'est une des sources fréquentes de charabia.

Je voudrais faire une déclaration pompeuse et péremptoire : *je ne veux pas voir de référence à un mystérieux Δ quand vous cherchez à résoudre une équation du second degré* (et encore moins lire "théorème de delta" ou "technique du delta" !) sur vos copies. Bon, ici il était parfaitement inutile de chercher à résoudre quoi que ce soit puisqu'il suffisait de lire où vivait l'inconnue, mais je parle (avec véhémence) de l'habitude générale issue du lycée.

Un exemple pour me faire comprendre : cherchons à résoudre l'équation $x^2 - x - 1$ d'inconnue *réelle* x. Vous êtes à l'université, vous avez eu votre bac, vous êtes capables d'écrire des phrases en français. Si vous écrivez quelque chose comme

"$\Delta = b^2 - 4ac = 5$, donc il y a deux solutions $x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$,

vous êtes en train d'introduire des notations qui vous servent d'aide-mémoire mais qui n'existent pas dans le problème et qui n'apportent rien à votre lecteur (et en plus, il est maladroit d'écrire ainsi les solutions). De grâce, plutôt qu'un déluge de notations, écrivez une phrase en français comme

"nous cherchons les racines d'un trinôme du second degré dont le discriminant est $(-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-1) = 5$, qui est strictement positif ; l'équation $x^2 - x - 1 = 0$ a donc deux solutions réelles distinctes. Ces solutions sont $\frac{1-\sqrt{5}}{2}$ et $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$."

On comprend ce que vous faites et vous n'encombrez pas la lecture, alors qu'avec la première solution, on ne comprend pas ce que vous faites (ou plutôt on ne devrait pas si tous les lycées n'utilisaient pas les mêmes notations). Moins de mots ne signifie pas plus clair, c'est souvent le contraire qui est vrai ! Mais ce n'est pas la peine non plus d'écrire trop de choses et de perdre du temps (par exemple en écrivant "soient $a = 1, b = -1, c = -1$, soit $\Delta = b^2 - 4ac$" et en adaptant la rédaction précédente pour que ce ne soit plus du charabia... cela serait plus long d'écrire cela que de s'en passer !)

2. Réécrire sans variables muettes la proposition suivante :

« Pour tout entier relatif p et tout entier naturel non nul q, $\sqrt{2} \neq \frac{p}{q}$. »

Correction Un synonyme de la proposition envisagée est : "$\sqrt{2}$ est irrationnel". Un autre synonyme est $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$". Même remarque qu'à l'exercice 2 : il n'est pas question qu'il y ait de variables dans le synonyme proposé !