# Interrogation du Mercredi 6 Décembre 2011

**Exercice 1** ***Examen du 27 juin 2011***
On considère un sous-ensemble $E$ majoré et non vide de l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels. Voici une liste d'énoncés, dans lesquels les lettres minuscules sont des variables astreintes à $\mathbb{R}$. Pour chaque couple $(i, j)$ d'indices compris entre 1 et 10 tels que $i < j$, indiquer si les énoncés $A_i$ et $A_j$ sont ou ne sont pas logiquement équivalents. On pourra consigner les réponses dans un tableau. Aucune justification n'est demandée.

| | |
|---|---|
| $A_1$ | $m$ est la borne supérieure de $E$ |
| $A_2$ | $m$ est un minorant de $E$ |
| $A_3$ | $m$ est le plus grand élément de $E$ |
| $A_4$ | $x$ est inférieur ou égal à la borne supérieure de $E$ |
| $A_5$ | $m \in E$ et $(\forall x \in E)(x \leq m)$ |
| $A_6$ | $\exists m(\forall x \in E)(m \leq x)$ |
| $A_7$ | $\exists z(x \leq z \wedge (z \in E$ et $(\forall y \in E)(y \leq z)))$ |
| $A_8$ | $((\forall x \in E)(x \leq m)$ et $(\forall y < m)(\exists z \in E)(z > y))$ |
| $A_9$ | $(\forall x \in E)(m \leq x)$ |
| $A_10$ | $x \in E$ |

**Exercice 2** Soient $A$ et $B$ deux parties de $E$. Le but de l'exercice est de discuter et de résoudre l'équation $A \cup X = B$ d'inconnue $X \in \mathcal{P}(E)$.

1. Montrer que l'équation $A \cup X = B$ a au moins une solution si et seulement si $A \subseteq B$.
2. Supposons $A \subseteq B$, et posons $X_0 = B \cap A^c$. Montrer que $X$ est solution de l'équation si et seulement si $X$ vérifie $X_0 \subseteq X \subseteq B$.