Université Paris Diderot
Département de Sciences Exactes

Langage Mathématique (LM1)
2010-2011

Examen du 27 juin 2011 (session de rattrapage)

Durée: 3 heures

Aucun document n'est autorisé. Dans les exercices 1, 2, 3, 5 et 6, toutes les réponses doivent être justifiées; dans les exercices 4 et 7, on ne demande pas de justification.
La plus grande importance sera accordée à la qualité de la présentation et de la rédaction.
Les sept exercices sont indépendants. Le sujet comporte trois pages.

Exercice 1

Pour chacune des expressions suivantes, dire s'il s'agit d'un nom ou d'un énoncé et indiquer les variables libres (parlantes) et les variables liées (muettes). L'ensemble indiqué entre crochets à droite en regard de chaque expression est celui auquel sont astreinte toutes les variables qui apparaissent dans l'expression.

(a) La dérivée en 1 de l'application $x \longmapsto \ln(xy)$ $[\mathbb{R}_+^*]$

(b) $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x^2+a^2}{x^3+b^2x+1} = z$ $[\mathbb{R}]$

(c) Le point de coordonnées (a,b) appartient à la courbe d'équation $x^2+y^2=1$ $[\mathbb{R}]$

(d) $\sum\limits_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ $[\mathbb{N}]$

(d) $\sum\limits_{k=1}^{n} p^2$ $[\mathbb{N}]$

Exercice 2

Démontrer que, pour n'importe quelles propositions A et B, l'énoncé

$(A \wedge (A \vee B) \Longleftrightarrow A$
est vrai.

Exercice 3

Quelles que soient les propositions p, q et r, on désigne par $E[p,q,r]$ la proposition

$$(p \wedge q) \vee (\neg p \wedge r).$$

1. Démontrer que, quelles que soient les propositions p et q, $E[p,p,q]$ est logiquement équivalente à $p \vee q$.
2. Donner une proposition simple utilisant les connecteurs usuels et logiquement équivalente à $E[p,q,p]$.

Exercice 4

On considère un sous-ensemble E majoré et non vide de l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels. On rappelle qu'un réel a est borne supérieure de E si et seulement si premièrement a est un majorant de E et deuxièmement tout majorant de E est supérieur ou égal à a. La borne supérieure de E est donc le plus petit des majorants de E. On rappelle aussi que tout sous-ensemble majoré et non vide de $\mathbb{R}$ admet une borne supérieure.

Voici une liste d'énoncés, dans lesquels les lettres minuscules sont des variables astreintes à $\mathbb{R}$. Pour chaque couple (i,j) d'indices compris entre 1 et 12 tels que $i < j$, indiquer si les énoncés A_i et A_j sont ou ne sont pas logiquement équivalents. On pourra consigner les réponses dans un tableau. Aucune justification n'est demandée.

A_1	m est la borne supérieure de E
A_2	m est un minorant de E
A_3	m est le plus grand élément de E
A_4	x est inférieur ou égal à la borne supérieure de E
A_5	$m \in E$ et $(\forall x \in E)\,(x \leqslant m)$
A_6	$\exists m\,(\forall x \in E)\,(m \leqslant x)$
A_7	$\forall y\,(m \leqslant y \iff (\forall x \in E)\,(x \leqslant y))$
A_8	$\exists z\,(x \leqslant z \wedge (z \in E$ et $(\forall y \in E)\,(y \leqslant z)))$
A_9	$((\forall x \in E)\,(x \leqslant m)$ et $(\forall y < m)\,(\exists z \in E)\,(z > y))$
A_{10}	$(\forall x \in E)\,(m \leqslant x)$
A_{11}	$\forall y\,((\forall z \in E)\,(z \leqslant y) \Longrightarrow (x \leqslant y))$
A_{12}	$x \in E$

Exercice 5

On considère trois droites D_1, D_2 et D_3 d'un plan P.

En utilisant uniquement les symboles suivants: des variables X, Y, Z, T, U, V pour désigner les points du plan P, le symbole d'appartenance $\in$, les connecteurs $\neg$, $\wedge$, $\vee$, $\Longrightarrow$, $\Longleftrightarrow$, les quantificateurs $\forall$ et $\exists$, des parenthèses, les symboles D_1, D_2 et D_3,
écrire un énoncé E' logiquement équivalent à l'énoncé E suivant:

Les droites D_1, D_2 et D_3 ne sont pas concourantes et parmi elles on ne peut pas en trouver deux qui soient parallèles.

Exercice 6

Toutes les fonctions considérées dans cet exercice sont supposées définies et indéfiniment dérivables sur l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels.

On rappelle que, étant donné une telle fonction f et un entier naturel n, la notation $f^{(n)}$ désigne la dérivée n-ième de la fonction f, qui est définie comme suit par récurrence:
$f^{(0)} = f$
et, pour tout entier $n \in \mathbb{N}$,
$f^{(n+1)} = \left(f^{(n)}\right)'$.

1. En raisonnant par récurrence sur le degré des polynômes, démontrer que, pour toute fonction polynôme P, il existe un entier k tel que $P^{(k)} = 0$ (la fonction identiquement nulle sur $\mathbb{R}$).
2. Démontrer qu'il n'existe aucune fonction polynôme P telle que, pour tout réel x, on ait

$$e^x = P(x).$$

Exercice 7

Dans cet exercice, on considère des énoncés $A[x,y]$ à deux variables qui sont astreintes à l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels et, pour chacun d'eux, six énoncés clos obtenus en quantifiant ces variables de diverses façons. On demande d'indiquer pour chacun de ces énoncés clos s'il est vrai ou non, sans donner de justification. On reproduira pour cela le tableau ci-après et on inscrira dans chaque case vide V ou F selon que l'énoncé correspondant est vrai ou faux.

$A[x,y]$:	$\sin(x+y) = \sin x + \sin y$	$y = x^2 - x$	$xy = x^2 - x$
$\forall x \forall y A[x,y]$			
$\forall x \exists y A[x,y]$			
$\exists x \forall y A[x,y]$			
$\exists x \exists y A[x,y]$			
$\forall y \exists x A[x,y]$			
$\exists y \forall x A[x,y]$			
