Examen de 2^{de} session du 27 juin 2011

Durée : 3 heures

Aucun document n'est autorisé. Toutes les réponses doivent être justifiées, sauf dans l'exercice 4. La plus grande importance sera accordée à la qualité de la présentation et de la rédaction. Les sept exercices sont indépendants. Le sujet comporte trois pages.

Exercice 1

Pour chacune des expressions suivantes, dire s'il s'agit d'un nom ou d'un énoncé et indiquer ses variables libres (parlantes) et ses variables liées (muettes). (Le domaine auquel les variables sont astreintes est mentionné entre crochets dans chaque cas.)

- (a) La dérivée en 1 de l'application $x \mapsto \ln(xy)$ [$\mathbb{R}_+^*$]
- (b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 + a^2}{x^3 + b^2x + 1} = z$ [$\mathbb{R}$]
- (c) Le point de coordonnées (a, b) appartient à la courbe d'équation $x^2 + y^2 = 1$ [$\mathbb{R}$]
- (d) $\sum_{k=1}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ [$\mathbb{N}$]
- (e) $\sum_{k=1}^n p^2$ [$\mathbb{N}$]
-

Exercice 2

Démontrer que, pour n'importe quelles propositions A et B , l'énoncé $(A \text{ et } (A \text{ ou } B)) \iff A$ est vrai.

Exercice 3

Quelles que soient les propositions p, q et r , on désigne par $E[p, q, r]$ la proposition

$(p \text{ et } q) \text{ ou } (\text{non } p \text{ et } r)$.

1. Démontrer que, quelles que soient les propositions p et q , $E[p, p, q]$ est logiquement équivalente à la proposition $(p \text{ ou } q)$.
 2. Donner une proposition simple n'utilisant qu'un seul des connecteurs : non, ou, et, $\implies$, $\iff$ et logiquement équivalente à $E[p, q, p]$.
-

Exercice 4

On rappelle qu'un réel a est borne supérieure d'un sous-ensemble E de $\mathbb{R}$ si et seulement si

1. a est un majorant de E
2. tout majorant de E est supérieur ou égal à a .

La borne supérieure de E est donc le plus petit des majorants de E .

On rappelle aussi que tout sous-ensemble majoré et non vide de $\mathbb{R}$ admet une borne supérieure.

On considère un sous-ensemble E majoré et non vide de l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels.
Pour chacun des énoncés $A_1 - A_4$ suivants :

A_1	m est la borne supérieure de E
A_2	m est un minorant de E
A_3	m est le plus grand élément de E
A_4	x est inférieur ou égal à la borne supérieure de E

indiquer tous les énoncés qui lui sont logiquement équivalent parmi :

B_1	$m \in E$ et $\forall x \in E \ x \leq m$
B_2	$\exists m (\forall x \in E \ m \leq x)$
B_3	$\forall y (m \leq y \iff \forall x \in E \ x \leq y)$
B_4	$\exists z \in E (x \leq z \text{ et } \forall y \in E \ y \leq z)$
B_5	$\forall x \in E \ m \leq x$
B_6	$(\forall x \in E \ x \leq m)$ et $(\forall y < m (\exists z \in E \ z > y))$
B_7	$\forall y ((\forall z \in E \ z \leq y) \implies x \leq y)$
B_8	$x \in E$

(On ne demande pas de justification.)

Exercice 5

On considère trois droites D_1, D_2 et D_3 d'un plan P .

En utilisant uniquement les symboles suivants : des variables A, B, C, D, E, F pour désigner les points du plan P , le symbole d'appartenance $\in$, les connecteurs non, ou, et, $\implies$, $\iff$, les quantificateurs $\forall$ et $\exists$, des parenthèses, les symboles D_1, D_2 et D_3 , écrire un énoncé logiquement équivalent à l'énoncé suivant :

Les droites D_1, D_2 et D_3 ne sont pas concourantes
et parmi elles on ne peut pas en trouver deux qui soient parallèles.

Exercice 6

Toutes les fonctions considérées dans cet exercice sont supposées définies et indéfiniment dérivables sur l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels.

On rappelle que, étant donné une telle fonction f et un entier naturel n , la notation $f^{(n)}$ désigne la dérivée n -ième de la fonction f , qui est définie comme suit par récurrence :

$$f^{(0)} = f$$

et, pour tout entier $n \in \mathbb{N}$,

$$f^{(n+1)} = (f^{(n)})'.$$

1. En raisonnant par récurrence sur le degré des polynômes, démontrer que, pour toute fonction polynôme P , il existe un entier k tel que $P^{(k)} = 0$ (la fonction identiquement nulle sur $\mathbb{R}$).
2. Démontrer qu'il n'existe aucune fonction polynôme P telle que, pour tout réel x , on ait

$$e^x = P(x).$$

Exercice 7

Dans cet exercice, on considère des énoncés $P[x, y]$ à deux variables qui sont astreintes à l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels.

1. $P[x, y]$ est ici l'énoncé : $\sin(x + y) = \sin x + \sin y$.

Indiquer, en justifiant votre réponse, si chacun des énoncés suivants est vrai ou faux :

(a) $\forall x \forall y P[x, y]$

(b) $\forall x \exists y P[x, y]$

(c) $\exists x \forall y P[x, y]$

(d) $\exists x \exists y P[x, y]$

(e) $\forall y \exists x P[x, y]$

(f) $\exists y \forall x P[x, y]$.

2. Reprendre la question 1 lorsque $P[x, y]$ est l'énoncé : $y = x^2 - x$.
 3. Reprendre la question 1 lorsque $P[x, y]$ est l'énoncé : $xy = x^2 - x$.
-